代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 05 月 20 日

前回の復習

Th. 1 (拡張定理（一変数版）)

$k=\bar{k}, I : k[X, \mathbf{Y}]$ のイデアル, $V := V(I) \subseteq \mathbb{A}^n, I_1 := I \cap k[\mathbf{Y}]$ とする.
部分解 $\mathbf{b} = (b_2, \ldots, b_n) \in V(I_1)$ に対し，$\overline{LC_X(f)} \neq 0$ を満たすような $f \in I$ が存在するなら，$\mathbf{b}$ は完全解に拡張される.
すなわち，$f(X, \mathbf{Y}) = c_N(\mathbf{Y})X^N + \cdots + c_0(\mathbf{Y}) \quad (c_k \in k[\mathbf{Y}])$ かつ $c_N(\mathbf{b}) \neq 0$ となるような f があれば，$\mathbf{a}$ により $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V(I)$.

[CLO06] の終結式を用いた議論ではなく，[楫 13] によるより初等的な証明を紹介した.（余裕があれば終結式の方も後程紹介したい）

拡張定理の系

拡張定理の次の形の系はよく使うが，上とは異なる方法で証明することも出来る．

Cor. 2 (拡張定理；一変数・定数係数版)

$k = \bar{k}$　$I \subseteq k[X, \mathbf{Y}]$: $k[X, \mathbf{Y}]$ のイデアル として，$V := V(I)$　$I_1 := I \cap k[\mathbf{Y}]$ とする．このとき，$\mathrm{LC}_X(f) \in k^\times$ を満たすような $f \in I$ が存在するならば，任意の部分解 $\mathbf{b} \in V(I_1)$ は完全解 $(a, \mathbf{b}) \in V(I)$ に拡張される．

系の証明 I

$\pi_1(V(I)) \supseteq Z(I_1)$ を示せばよい．以下では対偶を示す．すなわち，$\mathbf{b} \in \mathbb{A}^{n-1}$ を取って，

$$\mathbf{b} \notin \pi_1(V(I)) \Rightarrow \mathbf{b} \notin V(I_1)$$

を示す．それには結局，$\mathbf{b} \notin \pi_1(V(I))$ として，$g(\mathbf{b}) \neq 0$ となる $g \in I_1$ の存在を示せば十分である．
系の前提から，$\mathrm{LC}_X(f) \in k^\times$ となる $f \in I$ が存在し，イデアルの性質から f はモニックであるとしてよい．そこで $\mathrm{LT}(f) = X^N$ とする．この時，次が成立する．

Claim

任意の $h \in k[X, \mathbf{Y}]$ に対し，ある $g \in I$ と $h_i(\mathbf{b}) = 0$ を満たす $h_i \in k[\mathbf{Y}](1 \leq i \leq N-1)$ があって，次のように書ける．

$$h = g + h_0 + h_1 X + \cdots + h_{N-1} X^{N-1}$$

系の証明 II

主張の証明.

$\mathbf{b} \notin \pi_1(V(I))$ なので，$(\pi_1|_V)^{-1}(\mathbf{b}) = \emptyset$ となる．
$(\pi_1|_V)^{-1}(\mathbf{b}) = V(\bar{I}) \times \{\mathbf{b}\}$ だったので，$V(\bar{I}) = \emptyset$ となる．すると，一変数における弱零点定理により，$\bar{I} = k[X]$ となる．よって，任意の $h \in k[X, \mathbf{Y}]$ に対し，$\bar{h} \in k[X] = \bar{I}$ となるので，ある $g' \in I$ により $\bar{h} = \bar{g'}$ とできる．そこで，$h' = h - g'$ とおけば，$h = h' + g'$ であり，g' の取り方から $\bar{h'} = \bar{h} - \bar{g'} = 0$ となる．h' を $k[\mathbf{Y}]$ 上の X についての多項式とみなして f で割り算する：

$$h' = qf + \sum_{i=1}^{N-1} h_i X^i$$

∎

系の証明 III

証明のつづき.

ここで，$\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{b}$ という代入により $\bar{h}' = 0$ となるので，$k[X]$ における等式

$$-\bar{q}\bar{f} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i(\mathbf{b}) X^i$$

が得られる．$\deg(\bar{f}) = N$ であり，右辺の次数は高々 $N-1$ 次であるので，$\bar{q} = 0$ でないと矛盾．よって必然的に $h_i(\mathbf{b}) = 0$ となる．今，定義より

$$h = g' + h' = g' + qf + \sum h_i X^i$$

であるので，$g = g' + qf$ と置けばこれが求めるものである． ∎

系の証明 IV

これで証明の準備は整った．上の主張において
$h = 1, X, X^2, \ldots, X^{N-1}$ とおいて，それぞれに対して次を満たす
ような $g_i \in I, h_{ij} \in k[\mathbf{Y}] \quad (1 \leq i, j \leq N-1, h_{ij}(\mathbf{b}) = 0)$ を取る：

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & = & h_{00} & + & \cdots & + & h_{0N-1}X^{N-1} & + & g_0 \\ X & = & h_{10} & + & \cdots & + & h_{1N-1}X^{N-1} & + & g_1 \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ X & = & h_{10} & + & \cdots & + & h_{1N-1}X^{N-1} & + & g_1 \end{array}$$

行列を使って書き直せば，次のようになる．

$$E \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{N-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0N-1} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-10} & h_{N-11} & \cdots & h_{N-1N-1} \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{bmatrix}$$

系の証明 V

移項して,

$$(E-H)\begin{bmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{bmatrix}$$

両辺に $E-H$ の余因子行列（教科書では「随伴行列」となっているが間違い？(それだと ${}^t\bar{A}$?)） $\tilde{H}$ を掛ければ,

$$\det(E-H)\begin{bmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{N-1} \end{bmatrix} = \tilde{H}\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

系の証明 VI

となる．実は，$g = \det(E - H)$ とすると，これが求める g であることがわかる．$h_{ij} \in k[\mathbf{Y}]$ より $g \in k[\mathbf{Y}]$ である．また，式 (3.1) の一行目を展開すれば，

$$\det(E - H) = \tilde{h_0}0 \underbrace{g_0}_{\in I} + \cdots + h_{0\tilde{N}-1} \underbrace{g_{N-1}}_{\in I} \in I$$

となるので $g \in I$．よって，　$g \in k[\mathbf{Y}] \cap I = I_1$ となる．また，主張より各 $h_{ij} = 0$ となるので，
$g(\mathbf{b}) = \det(E - O) = \det E = 1 \neq 0$．よって示された． ■

問 2

次の方程式系を考える.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

(a) I をこれらの式が生成するイデアルとする． $I \cap k[x]$ および $I \cap k[y]$ の基底を求めよ.

(b) 方程式の解を求めよ.

(c) 有理解，即ち $\mathbb{Q}^2$ に属する解はどれか？

(d) この解が k^2 に全て含まれるような最小の体 k は何か？

解.

(a) 計算機を使うと,
$I \cap k[y] = \langle y^3 - y \rangle$, $I \cap k[x] = \langle x^4 - 4x^2 + 3 \rangle$ がわかる.

(b) x-消去イデアルを用いるのが一番簡単そうである.
$y^3 - y = 0$ を解いて部分解 $y = 0, \pm 1$ を得る． $y = 0$ のとき $\overline{I} = \langle x^2 - 3 \rangle$， $y = \pm 1$ のとき $\overline{I} = \langle x \mp 1 \rangle$（複号同順）となるので，これらの解は,

$$(x, y) = (0, \pm\sqrt{3}), (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

(c) 上の結果より，有理解は $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ のみ.

(d) 全ての解を含む体は $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

2. 消去の幾何学

- 消去理論の定理の幾何的な解釈を紹介する
  - 「消去 ＝ 代数多様体の，低次元部分空間への射影」というのが主な発想
- 部分解と消去イデアルの関係：閉包定理
  - 証明に零点定理を使うので，その話もしていきたい．
- 以下では簡単の為主に代数閉体上で話を進める．

Lemma 1

$\pi_s[V] \subseteq V(I_s)$

- 前回の証明でも用いた.
- この定理を使うと，$\pi_s[V]$ は次のように書ける：

$$\pi_s[V] = \{\, \mathbf{b} \in V(I_s) \mid \exists \mathbf{a} \in k^s[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V] \,\}$$

  即ち，$\pi_s[V]$ は「完全解に拡張される部分解の全体」と一致するということ.

- $$\begin{cases} xy = 1 \\ xz = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

  で定まるアフィン多様体 V を考えると，
  $\pi_1[V] = \{\, a \in k \mid a \neq 0 \,\}$ となる．これは原点が欠けているため，代数多様体ではない！
  - どこが欠けているか？を理解するために拡張定理が使える！

幾何版拡張定理 I

Th. 2 (幾何版拡張定理)

$V = V(f_1, \dots, f_s) \subseteq k^n \quad f_i = g_i(\mathbf{Y})X^{N_i} + (X \text{ の次数} < N_i))$

$$I_1 = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \cap k[\mathbf{Y}] : X\text{-消去イデアル}$$

とする．このとき，k^{n-1} で次が成立する：

$$V(I_1) = \pi_1[V] \cup (V(g_1, \dots, g_s) \cap V(I_1))$$

幾何版拡張定理 II

証明の前に注意．ゼミで紹介した，拡張定理における [榍 13] での前提条件

> 部分解 $\mathbf{b} = (b_2, \ldots, b_n) \in V(I_1)$ に対し，$\overline{LC_X(f)} \neq 0$ を満たすような $f \in I$ が存在する

と，[CLO06] における前提条件

> $\mathbf{b} \notin V(g_1, \ldots, g_s)$

は同値である．$g_i(\mathbf{b}) = \overline{\mathrm{LC}_X(f_i)}$ であったことに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} \notin V(g_1, \ldots, g_s) &\Leftrightarrow \exists i[g_i(\mathbf{b}) \neq 0] \\
&\Leftrightarrow \exists i[\overline{LC_X(f_i)} \neq 0] \\
&\Leftrightarrow \exists f \in I[\overline{LC_X(f)} \neq 0]
\end{aligned}$$

となるからである．但し，最後の同値性については，前回用いた補題 6.17 を用いた．

幾何版拡張定理 III

定理の証明.

補題より $\pi_1[V] \subseteq V(I_1)$ なので $V(I_1) = \pi_1[V] \cup (V(I_1) \setminus \pi_1(V))$ と書ける．拡張定理より，$\mathbf{b} \notin V(g_1, \ldots, g_s) \Rightarrow \mathbf{b} \in \pi_1[V]$ である．この対偶を取れば，$\mathbf{b} \notin \pi_1[V] \Rightarrow \mathbf{b} \in V(g_1, \ldots, g_s)$ であるので，

$$
\begin{aligned}
V(I_1) \setminus \pi_1[V] &= \{\, \mathbf{b} \in V(I_1) \mid \mathbf{b} \notin \pi_1[V] \,\} \\
&\subseteq \{\, \mathbf{b} \in V(I_1) \mid \mathbf{b} \in V(g_1, \ldots, g_s) \,\} \\
&= V(g_1, \ldots, g_s) \cap V(I_1) \subseteq V(I_1) \\
\therefore V(I_1) &= \pi_1[V] \cup (V(I_1) \setminus \pi_1(V)) \\
&\subseteq \pi_1[V] \cup (V(g_1, \ldots, g_s) \cap V(I_1)) \subseteq V(I_1) \\
\therefore V(I_1) &= \pi_1[V] \cup (V(g_1, \ldots, g_s) \cap V(I_1))
\end{aligned}
$$

∎

幾何版拡張定理 IV

Rem.

$V(I_1) \cap V(g_1, \ldots, g_s)$ には「拡張されない部分解」からはみ出す（つまり拡張される部分解）も含まれるかもしれない．しかし，けっきょく $V(I_1)$ の範囲に収まるので大丈夫.

定理から判るのは，$\pi_1[V]$ は少なくとも $V(g_1, \ldots, g_s)$ に含まれる点以外については $V(I_1)$ を覆っている，ということ．
$V(g_1, \ldots, g_s)$ は時折想像を絶して「大きい」ときがある．

Example.

$$\begin{cases}(y-z)x^2+xy=1\\(y-z)x^2+xz=1\end{cases}$$

は，最初の例と同じイデアルを生成する．しかし，先頭項係数 $y-z$ は $V(I_1)$ の生成元になってしまっているので，幾何版拡張定理から $\pi_1[V]$ の大きさを推定することは難しい……

Rem.

先程も用いた補題 6.17 により，I の X-消去順序による *Gröbner* 基底 G を取れば，

$$\exists g \in G[\overline{\mathrm{LC}_X(g)} \neq 0] \Leftrightarrow \exists f \in I[\overline{\mathrm{LC}_X(f)} \neq 0]$$

となるので，単に生成元の先頭項を見て駄目でもまだ $\pi_1[V]$ を求める方策が残っている場合がある．例えば上の場合，*lex* で基底を計算してやれば，$I=\langle y-z, xz-1\rangle$ が得られ，簡単な式の場合と同様の議論が使える．しかし，それでも，いつもこのような状態になっているとは限らない．

閉包定理（予告）

より詳しく $\pi_\ell[V]$ と $V(I_\ell)$ の関係を述べたものが，次の閉包定理．

Th. 3 (閉包定理)

$k = \bar{k}$ $\quad I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$

$I_s := I \cap k[\mathbf{Y}] \quad V = V(I)$

1. <u>弱閉包定理</u>. $V(I_s) = \overline{\pi_s[V]}$
2. <u>閉包定理</u>. $V \neq \emptyset$ ならば，あるアフィン多様体 $W \subsetneq V[I_s]$ が存在して，
   - (i) $\underline{V(I_s) \setminus W} \subseteq \pi_s[V]$
   - (ii) $\overline{V(I_s) \setminus W} \subseteq V(\pi_s[V])$

弱閉包定理については講義で既に示した．しかし，そこで本質的な役割をする零点定理を示していなかったので，次の担当分のゼミでは，零点定理を証明し，それから閉包定理を示す予定．

参考文献

[CLO06] David Cox, John Little, and Donal O'Shea.
Ideals, Varieties, and Algorithms.
Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, third edition, 2006.

[楫 13] 楫元.
グレブナー基底は面白い！
講義録, 2013.