代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 05 月 20 日

閉包定理

消去イデアルの零点と，零点の射影との間の関係を述べたのが閉包定理だった.

Th. 1 (閉包定理)

$k = \bar{k}$ $\quad I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$

$I_s := I \cap k[\mathbf{Y}]$ $\quad V = V(I)$

1. 弱閉包定理. $V(I_s) = \overline{\pi_s[V]}$
2. 閉包定理. $V \neq \emptyset$ ならば，あるアフィン多様体 $W \subsetneq V[I_s]$ が存在して，
   (i) $V(I_s) \setminus W \subseteq \pi_s[V]$
   (ii) $\overline{V(I_s) \setminus W} = V(I_s)$

今回は，零点定理をまず証明し，それを用いて弱閉包定理を証明する．以下では全て体は代数閉体とする．

弱零点定理

Th. 2 (弱零点定理)

$I \subseteq k[\mathbf{X}] = k[X_1, \ldots, X_n]$ を $k[\mathbf{X}]$ のイデアルとする．このとき次が成立する：

$$V(I) = \emptyset \Rightarrow 1 \in I \quad (i.e. \ \ I = k[\mathbf{X}])$$

$n = 1$ のときは k が代数閉体であることから従う．一般の n については，適切な変数変換により，

$$f(\mathbf{X}) = c_N Y_1^N + (Y_1 \text{についての次数} < N \text{ の項}) \quad (c_N \in k^\times)$$

の形に変形し，拡張定理の系と帰納法の仮定により示す．
これを精密に述べるため，変数変換について考えておく．

変数変換 I

$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \quad T = (t_{ij})_{1 \le i,n \le n} \in GL_n(k)$ とする．このとき，$Y_1, \ldots, Y_n$ を以下で定める：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

これにより，部分環 $k[\mathbf{Y}] \subseteq k[\mathbf{X}]$ が定まる．特に，T は正則なので，$k[\mathbf{X}] = k[\mathbf{Y}]$ となる．今，$P \in \mathbb{A}^n$ を列ベクトル $\mathbf{a}$ と見れば，

$$\begin{aligned} \{P\} &= V(\mathbf{X} - \mathbf{a}) \\ &= V(T^{-1}Y - \mathbf{a}) \\ &= V(T^{-1}(Y - T\mathbf{a})) \end{aligned}$$

T の正則性・線型性より，

$$= V(Y - T\mathbf{a})$$

変数変換 II

以上から，$\mathbf{Y}$ を独立変数と見做したときの P の座標は $T\mathbf{a}$ で与えられる．そこで，$\mathbf{Y}$ に関する座標 $\mathbf{b} = T\mathbf{a} = (b_1, \ldots, b_n)$ について，$\mathbf{Y}$ に関する射影を，

$$\pi'_s : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}; \quad (b_1, \ldots, b_n) \mapsto (b_{s+1}, \ldots, b_n)$$

と表す事にする．

以上を用いて，変数変換に関して次の補題を示す.

Lemma 3

k を無限体とし，$f \in k[\mathbf{X}] \setminus k$ とする．この時次が成立.

1. $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ はの適当な線型な変数変換により，

$$f = cY_1^N + (Y_1\text{にかんする次数} < N\text{の項}) \quad (c \in k^\times)$$

と出来る.

2. 更に，$k = \bar{k}$ ならば，$\mathbf{Y}$ に関する射影 $\pi_1' : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ の $V(f)$ への制限

$$\pi_s' \restriction_{V(f)} : V(f) \to \mathbb{A}^{n-1}$$

は全射であり，特に任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{A}^{n-1}$ に対し $(\pi_s' \restriction_{V(f)})^{-1}[\{\mathbf{b}\}]$ は有限である.

補題 (1) の証明 I

f の全次数を N として，f を全次数 N の項の和 f_N とそれ未満の項に分ける：

$$f = f_N + f_{<N}$$

このとき $f \neq 0$ より $f_N \neq 0$ である．以下の等式を考える．

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 \\ X_2 &= Y_2 + Z_2 Y_1 \\ X_3 &= Y_3 + Z_3 Y_1 \\ &\vdots \\ X_n &= Y_n + Z_n Y_1 \end{aligned}$$

これを f に代入すると，

$$f(\mathbf{X}) = f_N(Y_1, Y_2 + Z_2 Y_1, \ldots, Y_n + Z_n Y_1) + f_{<N}(Y_1, Y_2 + Z_2 Y_1, \ldots, Y_n$$

補題 (1) の証明 II

ここで，どの X_n にも Y_1 が出現することに注意すれば,

$$= f_N(1, Z_2, \ldots, Z_n) Y_1^N + (Y_1\text{についての次数} < N \text{ の項}) \tag{*}$$

となることがわかる．今,

$$0 \neq f_N(X_1, \ldots, X_n) = X_1^N f_N(1, \tfrac{X_2}{X_1}, \ldots, \tfrac{X_n}{X_1})$$

である．よって，$\frac{X_i}{X_1} \mapsto Z_i$ と置き換えれば，$f(1, Z_1, \ldots, Z_n)$ は Z_i の多項式としてゼロではない．今，仮定より k は無限体なので，$f_N(1, c_2, \ldots, c_N) \neq 0$ となる $c_i \in k$ が取れる．このとき，変換

$$\mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_N & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{=T} \mathbf{Y}$$

補題 (1) の証明 III

を考えると，T は明らかに正則である．よって，$\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への変数変換 $\mathbf{Y} = T^{-1}\mathbf{X}$ が定まる．これを (*) に代入すれば,

$$f = f_N(1, c_2, \ldots, c_N)Y_1^N + (Y_1\text{にかんする次数} < N \text{ の項})$$

となり，上の議論から $c = f(1, c_2, \ldots, c_N)$ とすればこれが題意を満たす変換となる． $\blacksquare$

補題 (2) の証明 I

$\mathbf{b} \ldots \mathbb{A}^{n-1}$ を一つ固定し，$\bar{f} = f(Y, \mathbf{b}) \in k[\mathbf{Y}]$ と表すことにする．このとき，前回示した補題より，

$$(\pi_1' \upharpoonright V(f))^{-1}[\{\mathbf{b}\}] = V(\bar{f}) \times \{\mathbf{b}\}$$

である．$c \neq 0$ より $\deg \bar{f} = N > 0$．$k = \bar{k}$ より $\bar{f}$ は少なくとも一つ根を持ち，その数は高々 N 個である．よって示された． $\blacksquare$

弱零点定理の証明 I

以上を用いて，変数の数 n に関する帰納法で弱零点定理を示す．
$n=1$ とする．PID なので $I=\langle f\rangle$ としてよい．$f=0$ のときは $V(0)=\mathbb{A}^n$ となり矛盾．$f\in k[X]\setminus k$ とすると，k は代数閉体なので f は少なくとも一つ根を持ち矛盾．よって $f\in k^\times$ であり，$1\in I$.
$(n-1)$ 変数で成立するとする．n の時を考える．Nöther 性より $I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ としてよい．このとき，$f_1\in k^\times$ ならば $I=\langle 1\rangle$ となり OK．そこで，以下では $f\in k[\mathbf{X}]\setminus k$ とする．前の補題により，ある線型な変数変換 $\mathbf{Y}=T\mathbf{X}$ で

$$f_1=cY_1^N+(Y_1\text{にかんする次数}<N\text{の項})\qquad(\#)$$

を満たすものが取れる．$\mathbf{Y}$ を独立な変数と見なして，この変数変換を施した後のものを $\tilde{f}_1,\tilde{I}$ のようにチルダ付きで書くことにする．定数は変数変換により不変なので，$1\in\tilde{I}$ を示せばよい．

弱零点定理の証明 II

$V(\tilde{I}) = T[V(I)] = T(\emptyset) = \emptyset$ である．(#) より $\mathrm{LC}_{Y_1}(\tilde{f}_1) \in k^\times$ なので，拡張定理の系から部分解と完全解が一致する．以上より，

$$V(\tilde{I}_1) = \pi_1'[V(\tilde{I})] = \pi_1'[\emptyset] = \emptyset$$

となる．よって，帰納法の仮定から $1 \in \tilde{I}_1 \subseteq \tilde{I}$ となる．
以上より示された． ∎

Th. 4 (弱零点定理 II)

$\mathfrak{m} \subseteq k[\mathbf{X}]$ 極大イデアルとすると，次が成立.

$$\exists a_1, \ldots, a_n \in k \ [\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle]$$

Proof.

$\mathfrak{m}$ を極大イデアルとすると，$1 \notin \mathfrak{m}$ である．よって，弱零点定理より $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ となるので，$(a_1, \ldots, a_n) \in V(\mathfrak{m})$ が取れる．そこで，イデアル $I = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ を考えると，

$$V(I) = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \subseteq V(\mathfrak{m})$$
$$\therefore \mathfrak{m} \subseteq I(V(\mathfrak{m})) \subseteq I(V(I))$$

適当に割り算すれば，$I(V(I)) = I((a_1, \ldots, a_n)) = I$ となることがわかる．明らかに $1 \notin I$ であるので，$\mathfrak{m}$ の極大性より $\mathfrak{m} = I = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ となる． ∎

Lemma 5

$f \in k[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$　$I : k[\mathbf{X}]$ のイデアル　$\langle I, 1 - fY \rangle : k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ のイデアル
以下は同値：

1. $f \in \sqrt{I}$
2. $1 \in \langle I, 1 - fY \rangle$

<u>(1) $\Rightarrow$ (2)</u>.
$f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^N \in I \Rightarrow 1 = f^N Y^N + (1 + fY + \cdots + f^{N-1} Y^{N-1})(1 - fY)$
<u>(1) $\Leftarrow$ (2)</u>. $1 \in \langle I, 1 - fY \rangle$ とする．このとき，$g_1, \ldots, g_s \in I$ と $a_1, \ldots, a_s, b \in k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ によって，

$$1 = a_1 g_1 + \cdots + a_s g_s + b(1 - fY)$$

と書ける．ここで代入 $Y \mapsto 1/f$ を施すと，$k(\mathbf{X})$ の等式

$$1 = \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{X}, 1/f) g_i(\mathbf{X}) + 0$$

が得られる．両辺に f^N を乗じて,

$$f^N = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{f^N a_i(\mathbf{X}, 1/f)}_{\substack{\cap \\ k[\mathbf{X}]}} \underbrace{g_i(\mathbf{X})}_{\substack{\cap \\ I}} \in I$$

よって $f \in \sqrt{I}$. $\blacksquare$

Th. 6 (Hilbert's Nullstellensatz)

$I(V(I)) = \sqrt{I}$

Proof.

$\underline{(\supseteq)}$. $V(I) = V(\sqrt{I})$ より $I(V(I)) = I(V(\sqrt{I})) \supseteq \sqrt{I}$ は OK.
$\underline{(\subseteq)}$. $f \in I(V(I))$ とする．$k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ のイデアル J を,

$$J := \langle I, 1 - fY \rangle_{k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}$$

により定める．このとき，$V(J) = \emptyset$ となることを示す．もし $p = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V(J)$ とすると，任意の $g \in \langle I \rangle_{k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]} \subseteq J$ に対し $g(p) = 0$ となり，特に $g \in I$ のとき $g(p) = g(\mathbf{a}) = 0$ である．よって $\mathbf{a} \in V(I)$ であり，従って $f(\mathbf{a}) = 0$ となる．
他方，$1 - fY$ は J の生成元なので，$0 = (1 - fY)(p) = 1 - f(p)Y$ となり，従って $f(p) \neq 0$ となる．これは上の結果に矛盾．
以上より $V(J) = \emptyset$ となり，弱零点定理より $1 \in J$ となる．よって，補題 5 より $f \in \sqrt{I}$ となる． ∎

弱閉包定理 I

以上の準備によって，弱閉包定理を示すことが出来る．

Th. 7 (弱閉包定理)

$V(I_s) = \overline{\pi_s[V(I)]}$

証明．$\pi_s[V(I)] \subseteq V(I_s)$ であったから，$V(I_s)$ が閉集合であることと合わせれば $\overline{\pi_s[V(I)]} \subseteq V(I_s)$ は出る．あとは逆向きの包含関係を示せばよい．

$\overline{\pi_s[V(I)]} = V(I(\pi_s[V(I)]))$ かつ $V(I_s) = V(\sqrt{I_s})$ だったから，

$I(\pi_s[V]) \subseteq \sqrt{I_s}$ を示せば，零点を取ることで

$\overline{\pi_s[V]} = V(I(\pi_s[V])) \supseteq V(\sqrt{I_s}) = V(I_s)$ となり証明が完了する．

弱閉包定理 II

$f \in I(\pi_s[V])$ とすると，

$$\forall p \in V, f(\pi_s(p)) = 0$$

f を $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ の元と見做せば $f(p) = 0$ となるので，
$f \in I(V(I)) = \sqrt{I}$ （$\because$ 零点定理）．よって根基イデアルの定義から $\exists N > 0, f^N \in I$ となる．今，$f \in k[\mathbf{X}]$ だったから $f^N \in k[\mathbf{X}]$ である．よって $f^N \in I \cap k[\mathbf{X}] = I_s$．したがって $f \in \sqrt{I_s}$ となる．
以上より示された． $\blacksquare$

強閉包定理を示すには，更に準備が要る．強閉包定理の証明自体は恐らく次回に譲ることになるので，ここでは必要な補題の証明を終えておくことにする．
複数変数以上の場合の拡張定理が本質的な役割を果す．

Prop. 8 (拡張定理 ($s \geq 1$))

$I : k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ のイデアル　$G : I$ の $\mathbf{X}$-消去順序による *Gröbner* 基底
部分解 $\mathbf{b} \in V(I_s)$ に対し，

$$\forall g \in G \setminus k[\mathbf{Y}], \overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} \neq 0$$

が成立するならば，$\mathbf{b} \in \pi_s[V]$ となる．

一般拡張定理の証明において次の補題を用いる．

Lemma 9

G : $\mathbf{X}$-消去順序 $>$ に関する I の極小 *Gröbner* 基底 とする．
$\mathbf{b} \in V(I_s)$ に対し

$$\forall g \in G, \overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} = 0 \Rightarrow \bar{g} = 0$$

が成立すれば，$\bar{G} \setminus \{0\}$ は $\bar{I}$ の（$>$ の $\mathbf{X}$ への制限に関する）*Gröbner* 基底となる．

証明の概略.

$S := \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(h)\frac{\mathbf{X}^{\gamma}}{\mathbf{X}^{\deg_{\mathbf{X}}(g)}}g - \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\frac{\mathbf{X}^{\gamma}}{\mathbf{X}^{\deg_{\mathbf{X}}(h)}}h$ とおいて，代入 $Y \mapsto \mathbf{b}$ の結果 $\bar{S}$ を考える．$S(\bar{g}, \bar{h})$ を $\bar{S}$ と適切な定数によって表し，標準表示を考えると，LCM 判定法により $\bar{G}$ が $\bar{I}$ の Gröbner 基底となることがわかる． ∎

拡張定理の証明.

$\bar{G} = \{0\}$ ならば $\bar{I} = 0$ であるので,

$$(\pi_s \restriction V)^{-1}[\{\mathbf{b}\}] = I(0) \times \{\mathbf{b}\} = \mathbb{A}^n \times \{\mathbf{b}\}$$

となり，結論が成立する.
そこで $\bar{G} \neq \{0\}$ とする．このとき,

$$\forall g \in G \cap k[\mathbf{Y}], \bar{g} = g(\mathbf{b}) = 0$$

となる．仮定より $\overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} = 0$ ならば $g \in k[\mathbf{Y}]$ となるので，上の式と合せると補題 9 の前提を満たす．従って $\bar{G} \setminus \{0\}$ は $\bar{I}$ の Gröbner 基底となる．そこで $\bar{g} \neq 0$ とすれば，上の式から $g \notin k[\mathbf{Y}]$．定理の前提から $\overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} \neq 0$ となるので，特に $\bar{g} \notin k^{\times}$ であり，g は任意だったから $(\bar{G} \setminus \{0\}) \cap k^{\times} = \emptyset$ となる. $\bar{I} = k[\mathbf{X}]$ であることと $\bar{G}$ が k の単元を含むことは同値である（consitency theorem）ので，$\bar{I} \subsetneq k[\mathbf{X}]$ となる．よって，弱零点定理より $V(\bar{I}) \neq \emptyset$ となるので，$(\pi_s \restriction V)^{-1}[\{\mathbf{b}\}] = V(\bar{I}) \times \{\mathbf{b}\} \neq \emptyset$.
よって示された. ∎