代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 06 月 10 日

（強）閉包定理

Th. 1 (閉包定理)

$k = \overline{k}$ $\quad I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subseteq k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$

$I_s := I \cap k[\mathbf{Y}]$ $\quad V = V(I)$

1. <u>弱閉包定理</u>. $V(I_s) = \overline{\pi_s[V]}$
2. <u>閉包定理</u>. $V \neq \emptyset$ ならば，ある代数的集合 $W \subsetneq V[I_s]$ が存在して，
   (i) $\underline{V(I_s) \setminus W} \subseteq \pi_s[V]$
   (ii) $\overline{V(I_s) \setminus W} = V(I_s)$

弱閉包定理までは前回証明が完了していた．

強い閉包定理の証明では，複数変数以上の場合の拡張定理が本質的な役割を果す.

Prop. 2 (拡張定理 ($s \geq 1$))

$I : k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ のイデアル　$G : I$ の $\mathbf{X}$-消去順序による *Gröbner* 基底

部分解 $\mathbf{b} \in V(I_s)$ に対し，

$$\forall g \in G \setminus k[\mathbf{Y}], \overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} \neq 0$$

が成立するならば，$\mathbf{b} \in \pi_s[V]$ となる.

一般拡張定理の証明において次の補題を用いる.

Lemma 3

G : $\mathbf{X}$-消去順序 $>$ に関する I の極小 *Gröbner* 基底 とする.
$\mathbf{b} \in V(I_s)$ に対し

$$\forall g \in G, \overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} = 0 \Rightarrow \bar{g} = 0$$

が成立すれば, $\bar{G} \setminus \{0\}$ は $\bar{I}$ の（$>$ の $\mathbf{X}$ への制限に関する）*Gröbner* 基底となる.

証明の概略.

$S := \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(h)\frac{\mathbf{X}^{\gamma}}{\mathbf{X}^{\deg_{\mathbf{X}}(g)}}g - \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\frac{\mathbf{X}^{\gamma}}{\mathbf{X}^{\deg_{\mathbf{X}}(h)}}h$ とおいて, 代入 $Y \mapsto \mathbf{b}$ の結果 $\bar{S}$ を考える. $S(\bar{g}, \bar{h})$ を $\bar{S}$ と適切な定数によって表し, 標準表示を考えると, LCM 判定法により $\bar{G}$ が $\bar{I}$ の Gröbner 基底となることがわかる. ∎

拡張定理の証明.

$\bar{G} = \{0\}$ ならば $\bar{I} = 0$ であるので,

$$(\pi_s \restriction V)^{-1}[\{\mathbf{b}\}] = I(0) \times \{\mathbf{b}\} = \mathbb{A}^n \times \{\mathbf{b}\}$$

となり，結論が成立する．
そこで $\bar{G} \neq \{0\}$ とする．このとき,

$$\forall g \in G \cap k[\mathbf{Y}], \bar{g} = g(\mathbf{b}) = 0$$

となる．仮定より $\overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} = 0$ ならば $g \in k[\mathbf{Y}]$ となるので，上の式と合せると補題 3 の前提を満たす．従って $\bar{G} \setminus \{0\}$ は $\bar{I}$ の Gröbner 基底となる．そこで $\bar{g} \neq 0$ とすれば，上の式から $g \notin k[\mathbf{Y}]$．定理の前提から $\overline{\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)} \neq 0$ となるので，特に $\bar{g} \notin k^\times$ であり，g は任意だったから $(\bar{G} \setminus \{0\}) \cap k^\times = \emptyset$ となる．$\bar{I} = k[\mathbf{X}]$ であることと $\bar{G}$ が k の単元を含むことは同値である（consitency theorem）ので，$\bar{I} \subsetneq k[\mathbf{X}]$ となる．よって，弱零点定理より $V(\bar{I}) \neq \emptyset$ となるので，$(\pi_s \restriction V)^{-1}[\{\mathbf{b}\}] = V(\bar{I}) \times \{\mathbf{b}\} \neq \emptyset$.
よって示された． ∎

閉包定理の証明の概略

一般変数の拡張定理の対偶を取ると，

$$\mathbf{b} \in V(I_s) \setminus \pi_s[V] \Rightarrow \exists g \in G \setminus k[\mathbf{Y}] \ \text{ s.t. } \ g \in V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))$$

となる．そこで，$V(I_s) \setminus \cup_{g \in G \setminus k[\mathbf{Y}]} V(LC_{\mathbf{X}}(g))$ が完全解に拡張される部分解の全体となる．これと $V(I_s)$ の共通部分が大きすぎる時に困るので，その場合を粛々と対処する．

閉包定理の証明 I

G を $\mathbf{X}$-消去順序に関する I の極小 Gröbner 基底とする．
$G \subseteq k[\mathbf{Y}]$ なら，
$\pi_s[V] = \pi_s[V(G)] = \pi_s[\mathbb{A}^s \times V_{\mathbb{A}^{n-s}}(G)] = V_{\mathbb{A}^{n-s}}(G)$ であり，
$V(I_s) = V(G_s) = V_{\mathbb{A}^{n-s}}(G)$ となるので，$V(I_s) = \pi_s[V]$ となる．
よって，特に $W = \emptyset$ に取れば大丈夫である．
そこで，$G \not\subseteq k[\mathbf{Y}]$ とする．ここで，

$$J := \left\langle \prod_{g \in G \setminus k[\mathbf{Y}]} \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \right\rangle + I_s$$

とおく．すると，

閉包定理の証明 II

$$
\begin{aligned}
V(J) &= V\left(\left\langle \prod_{g\in G\setminus k[\mathbf{Y}]} \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \right\rangle + I_s\right) \\
&= V\left(\prod_{g\in G\setminus k[\mathbf{Y}]} \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\right) \cap V(I_s) \\
&= \left(\bigcup_{g\in G\setminus k[\mathbf{Y}]} V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))\right) \cap V(I_s)
\end{aligned}
$$

となる．このとき，

$$
V(I_s) \setminus V(J) \subseteq \pi_s[V]
$$

閉包定理の証明 III

である．実際，<u>任意に</u> $\mathbf{b} \in V(I_s) \setminus V(J)$ を取ると，$\forall g \in G \setminus k[\mathbf{Y}], \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \neq 0$ となり，上で示した拡張定理から $\mathbf{b} \in V(I_s)$ となる．ここで，もし $\overline{V(I_s) \setminus V(J)} = V(I_s)$ ならば $W = V(J)$ と置けばよい．しかし，$V(J)$ が $V(I_s)$ のある既約部分を含んでいる場合はうまく行かない．そこで，大きく二つに場合分けして示そう．

<u>場合 1</u>：$\forall g \in G \setminus k[\mathbf{Y}], \overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))} = V(I_s)$ のとき．各 $g \in G \setminus k[\mathbf{Y}]$ について，$V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))$ は $V(I_s)$ で稠密な開集合である．従ってその有限個の共通部分も稠密になるので，

$$\overline{V(I_s) \setminus V(J)} = \overline{\bigcap_{g \in G \setminus k[\mathbf{Y}]} V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))} = V(I_s)$$

よって，$W = V(J)$ と置けば題意を満たす．

閉包定理の証明 IV

場合 2：ある $g \in G \setminus k[\mathbf{Y}]$ があって $\overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))} \subsetneq V(I_s)$ となる時．ここで，$k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ の Noether 性より，次を示せば十分である．

> I より真に大きな任意のイデアルについて主張が成り立てば，I でも主張が成立する．

即ち，イデアルの（逆向き）包含関係に関する整礎帰納法により命題を示す．

閉包定理の証明 V

場合 2-1：$V(I_s) \subseteq V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))$ のとき．$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V(I)$ とすると，$\mathbf{b} = \pi_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \pi_s[V] \subseteq V(I_s)$ より
$\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)(\mathbf{b}) = 0$ となり，$\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \in I(V(I)) = \sqrt{I}$ となる（$\because$ 零点定理）．このとき，実は $\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \notin I$ である．もし $\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \in I$ とすると，$\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \in k[\mathbf{Y}]$ なので $\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \in I_s$ となるので，ある $p \in G_s$ があって $\mathrm{LT}(p)|\mathrm{LT}(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))$ となる．今，$\mathrm{LT}(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)) \mid \mathrm{LT}(g)$ であるので，$\mathrm{LT}(p)|\mathrm{LT}(g)$ となり，G の極小性より $p = g$ となる．これは $g \notin k[\mathbf{Y}]$ に矛盾．以上から，

$$I \subsetneq I + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle \subseteq \sqrt{I}$$

$$V(I) = V(\sqrt{I}) \subseteq V(I + I + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle) \subseteq V(I)$$

$$\therefore V(I) = V(I + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle)$$

となる．そこで，$I' = I + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle$ とおいて，帰納法の仮定を適用する：

閉包定理の証明 VI

$$\exists W \subseteq V(I'_s) \begin{cases} V(I'_s) \setminus W \subseteq \pi_s[V(I')] = \pi_s[V(I)] \\ \overline{V(I'_s) \setminus W} = V(I'_s) \end{cases} \qquad (*)$$

よって，後は $V(I_s) = V(I'_s)$ が云えれば十分である．上での議論と同様に， $k[\mathbf{Y}]$ での関係式

$$I_s \subseteq I_s + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle_{k[\mathbf{Y}]} \subseteq \sqrt{I_s}_{k[\mathbf{Y}]}$$

が成立する．このとき，$I_s + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle_{k[\mathbf{Y}]} \subseteq I'_s$ であり，

$$\begin{aligned} f \in \sqrt{I_s} &\Leftrightarrow \exists N > 0[f^N \in I \cap k[\mathbf{Y}]] \\ &\Leftrightarrow \exists N > 0[f^N \in I] \wedge f \in k[\mathbf{Y}] \\ &\Leftrightarrow f \in (\sqrt{I})_s \end{aligned}$$

閉包定理の証明 VII

が成立するので，$I' \subseteq \sqrt{I}$ から $I'_s \subseteq \sqrt{I_s}$ が云える．これらから，

$$\begin{aligned} V(I_s) &= V(\sqrt{I_s}) \subseteq V(I'_s) \\ &\subseteq V(I_s + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle_{k[\mathbf{Y}]}) \subseteq V(I_s) \\ \therefore V(I_s) &= V(I'_s) \end{aligned}$$

よって，(*) に代入すれば，

$$\exists W \subseteq V(I_s) \begin{cases} V(I_s) \setminus W \subseteq \pi_s[V(I)] \\ \overline{V(I_s) \setminus W} = V(I_s) \end{cases}$$

となり，結論を得る．

閉包定理の証明 VIII

場合 2-2：$V(I_s) \not\subseteq V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))$ のとき．このとき，

$$V(I_s) = (V(I_s) \cap V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))) \cup \overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))} \tag{3.1}$$

と書ける．逆像を調べると，

$$\begin{aligned}
&\pi_s^{-1}[V(I_s) \cap V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))] \cap V(I) \\
&= \pi_s^{-1}[\underbrace{V(I_s + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\rangle)}_{\in k[\mathbf{Y}]}] \cap V(I) \\
&= V(\langle I_s + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\rangle\rangle) \cap V(I) \\
&= V(I + \langle I_s + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\rangle\rangle) \\
&= V(I + \langle I_s\rangle + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\rangle) \\
&= V(I + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)\rangle) \qquad (\because I_s \subseteq I)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

閉包定理の証明 IX

$$
\begin{aligned}
&\pi_s^{-1}[\overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g))}] \cap V(I) \\
&= \pi_s^{-1}[V(I_s : \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)^\infty)] \cap V(I) \quad (\because \text{差集合定理（講義で済）}) \\
&= V(\langle I_s : \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)^\infty \rangle) \cap V(I) \\
&= V(I + \langle I_s : \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)^\infty \rangle)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

そこで，

$$
I' = I + \langle \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g) \rangle \quad I'' = I + \langle I_s : \mathrm{LC}_{\mathbf{X}}(g)^\infty \rangle
$$

とおこう．$\pi_s[V] \subseteq V(I_s)$ なので，$V \subseteq \pi_s^{-1}[V(I_s)]$ である．よって，(3.1)，(3.2) および (3.3) より，分解

$$
V(I) = V(I') \cup V(I'') \tag{3.4}
$$

閉包定理の証明 X

を得る．実際，

$$
\begin{aligned}
&V(I') \cup V(I'') \\
&= (\pi_s^{-1}[V(I_s) \cap V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))] \cup \pi_s^{-1}[\overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))}]) \cap V(I) \\
&= \pi_s^{-1}[(V(I_s) \cap V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))) \cup \overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))}] \cap V(I) \\
&= \pi_s^{-1}[V(I_s)] \cap V(I) \\
&= V(I)
\end{aligned}
$$

となる．更に，(3.4) は V の非自明な分解になっている．

閉包定理の証明 XI

もし $V(I') = V(I)$ とすると，(3.2) より
$V(I) \subseteq \pi_s^{-1}[V(I_s) \cap V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))]$ となり，

$$V(I_s) = \overline{\pi_s[V(I)]} \subseteq V(I_s) \cap V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g)) \subseteq V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))$$

となって，2-2 の仮定に反する．同様に $V(I'') = V(I)$ とすると，
(3.3) より $V(I) \subseteq \pi_s^{-1}[\overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))}]$ となるので，

$$V(I_s) = \overline{\pi_s^{-1}[V(I)]} \subseteq \overline{V(I_s) \setminus V(\mathrm{LC}_{\mathbf{x}}(g))}$$

となる．これは場合 2 の仮定に反する．よって，
$V(I) = V(I') \cup V(I'')$ は V の非自明な分解である．

閉包定理の証明 XII

よって，$I \subsetneq I', I \subsetneq I''$ となるので，帰納法の仮定が適用出来，

$$\exists W' \subseteq V(I'_s) \qquad\qquad \exists W'' \subseteq V(I''_s)$$

$$\begin{cases} V(I'_s) \setminus W' \subseteq \pi_s[V(I')] \\ \overline{V(I'_s) \setminus W'} = V(I'_s) \end{cases} \qquad \begin{cases} V(I''_s) \setminus W'' \subseteq \pi_s[V(I'')] \\ \overline{V(I''_s) \setminus W''} = V(I''_s) \end{cases}$$

を満たすような W, W'' が取れる．そこで，$W = W' \cup W''$ と置けば，これが題意を満たすことを示す．実際，(i) については，

$$\begin{aligned} V(I_s) \setminus W &= (V(I'_s) \cup V(I''_s)) \setminus (W' \cup W'') \\ &= (V(I'_s) \setminus (W' \cup W'')) \cup (V(I''_s) \setminus (W' \cup W'')) \\ &\subseteq (V(I'_s) \setminus W') \cup (V(I''_s) \setminus W'') \\ &\subseteq \pi_s[V(I')] \cup \pi_s[V(I'')] \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= \pi_s[V(I') \cup V(I'')] = \pi_s[V(I)] \end{aligned}$$

となるので成立．

閉包定理の証明 XIII

また，(ii) については，

$$\begin{aligned}
\overline{V(I_s)\setminus W'} &= \overline{(V(I'_s)\setminus W')\cup(V(I''_s)\setminus V(I'_s))}\\
&= \overline{V(I'_s)\setminus W'}\cup\overline{V(I''_s)\setminus V(I'_s)}\\
&= V(I'_s)\cup\overline{V(I''_s)\setminus V(I'_s)} \quad (\because \text{帰納法の仮定})\\
&\supseteq V(I'_s)\cup(V(I''_s)\setminus V(I'_s))\\
&= V(I'_s)\cup V(I''_s) = V(I_s)
\end{aligned}$$

よって $V(I_s)\setminus W'$ は $V(I_s)$ で稠密な開集合となる．同様にして $V(I_s)\setminus W''$ も $V(I_s)$ の稠密開集合となるので，

$$(V(I_s)\setminus W')\cap(V(I_s)\setminus W'') = V(I_s)\setminus(W'\cup W'')$$

も $V(I_s)$ で稠密となる．以上より，I についても定理の主張が成立する．よって，整礎帰納法により定理が示された． ∎

Exercise 3-5 (閉包定理が $\mathbb{R}$ では不成立な例)

$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 + 2, 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 5 \rangle$, $\quad V = V(I)$ とするとき，次の問題に答えよ．

(a) $\mathbb{C}$ 上では $V(I_1) = \pi_1[V]$ となることを示せ．

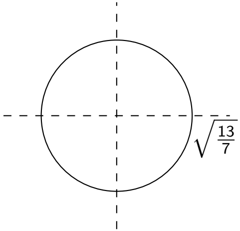
(b) $\mathbb{R}$ 上では $V(I) = \emptyset$ だが $V(I_1)$ は無限集合となることを示せ．これにより，代数閉体でない場合，$V(I_1)$ が $\pi_1[V]$ を含む最小の代数的集合よりも非常に大きくなってしまう場合がある事がわかる．

(a) I の lex に関する Gröbner 基底 G を計算すると，

$$G = \{f_1 = 7y^2 + 7z^2 - 13, f_2 = 9x^2 + 16y^2 + 16z^2 + 5\}$$

となる．$\mathrm{LC}_x(f_2) = 9 \in k^\times$ より，特に拡張定理の系から，$V(I_1) = \pi_1[V]$ となることが判る．

(b) 上での計算より，$I_1 = \langle 7y^2 + 7z^2 - 13 \rangle$ である．よって，

$V(I_1) =$ 

であり，これは明らかに無限集合．しかし，f_1 を f_2 に代入すると，

$$f_2 = 9x^2 + 16(y^2 + z^2) = 9x^2 + \frac{13 \cdot 16}{7} + 5$$

であり，これは明らかに $\mathbb{R}$ の範囲では根を持たない．よって $V = V(G) = \emptyset$ である．

参考文献

[CLO06] David Cox, John Little, and Donal O'Shea.
Ideals, Varieties, and Algorithms.
Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, third edition, 2006.

[楫 13] 楫元.
グレブナー基底は面白い！
講義録, 2013.