

# 代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部  
数学科四年

2013年06月24日

# 陰関数表示 (Implicitization) I

- 代数多様体 (代数的集合) はしばしばパラメタ表示できることがある
- パラメタ表示から多様体の定義方程式を計算することは出来ないか? = 「陰関数問題」
- 陰関数問題を精確に定式化するには, いくらか注意が必要
  - パラメタ表示が代数的集合全体を覆っているとは限らない!
  - 例:

$$\begin{cases} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$  のパラメータ表示だが,  $(-1, 0)$  を含まない!

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

## 陰関数表示 (Implicitization) II

- 陰関数問題 = 「パラメタ表示された図形を含む最小の代数的集合  $V$  を求めよ」
  - 最小の  $V$  が見付かったとして考えるべきこと：
    - ① パラメタ表示は  $V$  全体を覆うか？
    - ② 欠けている点があるなら、それはどこか？
- いずれも Gröbner と消去理論が大きな武器となる！

## 多項式によるパラメタ表示の場合 I

多項式によるパラメタ表示

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(T_1, \dots, T_m) \\ &\vdots \\ X_n &= f_n(T_1, \dots, T_m) \quad (f_i \in k[\mathbf{T}]) \end{aligned} \tag{3.1}$$

の場合をまずは考える。これは幾何的には多項式写像

$$\begin{array}{ccc} F : k^m & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & k^n \\ \Psi & & \Psi \\ (T_1, \dots, T_m) & \longmapsto & (f_1(T_1, \dots, T_m), \dots, f_n(T_1, \dots, T_m)) \end{array}$$

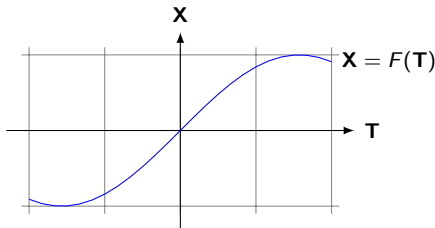
## 多項式によるパラメタ表示の場合 II

と考えることが出来る. すると,  $F[k^m] \subseteq k^n$  は (3.1) によりパラメタ表示されていることになる. この時,  $F[k^m]$  がアフィン代数的集合になるとは限らないので, 陰関数問題を解くにはこれを含む最小の代数的集合を見付けなくてはならない.

(3.1) は  $k^{n+m}$  の代数的集合

$$V = V(X_1 - f_1, \dots, X_n - f_n) \subseteq k^{n+m}$$

を定める.  $V$  は函数  $F$  のグラフと見做せる:



## 多項式によるパラメタ表示の場合 III

ここで、写像

$$\begin{array}{ccc} i: k^m & \longrightarrow & k^{n+m} \\ \psi & & \psi \\ \mathbf{T} & \longmapsto & (\mathbf{T}, f_1(\mathbf{T}), \dots, f_n(\mathbf{T})) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_m: k^{n+m} & \longrightarrow & k^n \\ \psi & & \psi \\ (\mathbf{T}, \mathbf{X}) & \longmapsto & \mathbf{X} \end{array}$$

を考えると、次の可換図式が得られ、特に  $i[k^m] = V$  となる：

$$\begin{array}{ccc} & k^{n+m} & \\ & \nearrow i & \searrow \pi_m \\ k^m & \xrightarrow{F} & k^n \end{array}$$

## 多項式によるパラメタ表示の場合 IV

### Exercise 3-1 (上を示せ. )

$$(\pi_m \circ i)(\mathbf{t}) = \pi_m(i(\mathbf{t})) = \pi_m(\mathbf{t}, F(\mathbf{t})) = F(\mathbf{t})$$

よって可換性は OK. また,  $\mathbf{t} \subseteq k^m, \mathbf{x} \in k^n$  について,

$$(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in V(X_1 - f_1, \dots, X_n - f_n)$$

とすると  $x_i = f_i(\mathbf{t})$  なので,  $(\mathbf{t}, F(\mathbf{t})) \in i[k^m]$  より  $V \subseteq i[k^m]$ . また,  $i(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, F(\mathbf{t}))$  であり,  $(X_i - f_i)(i(\mathbf{t})) = f_i(\mathbf{t}) - f_i(\mathbf{t})$  となるので,  $i(\mathbf{t}) \in V$ . 以上より  $V = i[k^m]$ .

## 多項式によるパラメタ表示の場合 V

以上より,

$$F[k^m] = \pi_m[j[k^m]] = \pi_m[V] \quad (3.2)$$

を得る. よって, パラメタ表示の像はグラフの射影になる.  
これを用いれば, 消去理論を適用出来て,  $F[k^m]$  を含む代数的集合を見付けることが出来る!



## 多項式の陰関数表示

以上を踏まえて、多項式によるパラメタ表示の陰関数表示を得ることが出来る。

### Th. 1 (多項式の陰関数表示)

$\#k = \infty$      $F = (f_1, \dots, f_n) : k^m \rightarrow k^n$  (多項式写像)

$I = \langle X_1 - f_1, \dots, X_n - f_n \rangle \subseteq k[\mathbf{X}, \mathbf{T}]$      $\bar{I} = I \cap k[\mathbf{X}]$

とする。このとき、 $\overline{F[k^m]} = V(I_m) \subseteq k^n$ 。

証明の方針 :  $k = \bar{k}$  の時は (弱) 閉包定理から従う。一般の無限体の場合は、その代数閉包  $\bar{k}$  との間を往き来することで証明することが出来る。

## 多項式陰関数表示の証明 I

$k = \bar{k}$  の時 (3.2) より  $F[k^m] = \pi_m[V]$  である. 特に  $k$  が代数閉体なので弱閉包定理より  $\overline{F[k^m]} = \overline{\pi_m[V]} = V(I_m)$ .

一般の無限体のとき  $K = \bar{k} \supset k$  とおく. 第  $m$  消去イデアルの Gröbner 基底の計算は体演算しか用いず,  $k$  は  $K$  の部分体であるから,  $I_m$  の Gröbner 基底は係数の拡大によって不変である. 示すべきことは,  $V_k(I_m)$  が  $F[k^m]$  を含む最小の代数的集合であることなので,  $k^n$  の任意の代数的集合  $Z_k = V_k(g_1, \dots, g_s)$  が  $F[k^m] \subseteq Z_k$  を満たすなら  $V_k(I_m) \subseteq Z_k$  となることを示せばよい. 各  $g_i$  は  $Z_k$  上でゼロとなるので,  $F[k^m] \subseteq Z_k$  より特に  $F[k^m]$  上でもゼロとなる. よって,  $g_i \circ F \in k[\mathbf{T}]$  は  $k^m$  上で恒等的にゼロとなり, 特に  $\#k = \infty$  なので  $g_i \circ F = 0$  (ゼロ多項式) である. よって, 係数を  $K$  に拡大すれば,  $g_i \circ F$  は  $K^m$  上でも消え, 従って  $g_i$  は  $F[K^m]$  上で消える.

## 多項式陰関数表示の証明 II

よって,  $Z_K = V_K(g_1, \dots, g_s)$  とおけば,  
 $F[K^m] \subseteq Z_K$  となる.  $K$  は代数閉体であるから, 上の議論より  $V_K(I_m)$  は  $F[k^m]$  を含む最小の代数的集合なので,  $V_K(I_m) \subseteq Z_K$  である. 以上より,

$$V_k(I_m) = V_K(I_m) \cap k^n \subseteq Z_K \cap k^n = Z_k$$

よって  $V_k(I_m)$  は  $F[k^m]$  を含む最小の代数的集合である. ■

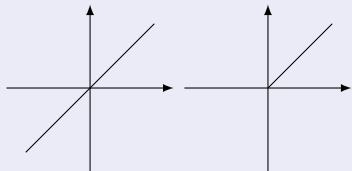
### Exercise 3-2

$k = \bar{k}$  の時は、更に強閉包定理より  $W \subsetneq V(I_m)$  で  $V(I_m) \setminus W \subseteq F[k^m]$  となるものが取れることが判る.

### Exercise 3-3 ( $k = \mathbb{R}$ で上の議論が不成立な例を示せ)

曲線  $C$  を  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases}$  により定めると、 $I = \langle x - t^2, y - t^2 \rangle$  の

Gröbner 基底は  $G = \{x - y, y - t^2\}$  である. よって  $I_1 = \langle x - y \rangle$  であり、 $V(I_1)$  は左図のようになる. しかし、 $t \in \mathbb{R}$  では常に  $t^2 \geq 0$  なので、 $F[\mathbb{R}]$  の像は右図のようになる.  $W$  として全体を取るしかなくなってしまう、閉包を取っても  $V(I_m)$  にはならない.



以上の議論から、多項式陰関数問題を解くアルゴリズムが得られる。

- ① 入力  $X_i = f_i(T_1, \dots, T_m)$
- ②  $I = \langle X_i - f_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$
- ③ **T**-消去順序により  $I_1$  の Gröbner 基底を求める。
- ④  $V(I_1)$  が求める最小の代数的集合。

## 具体例：ねじれ三次曲線 I

$\mathbb{R}^3$  でのねじれ三次曲線  $C$  の接曲面  $\text{Tan}C$  は次で与えられるのだった：

$$\begin{cases} x &= t + u \\ y &= t^2 + 2tu \\ z &= t^3 + 3t^2u \end{cases} \quad (3.3)$$

この曲面が次の方程式で定義される代数的集合  $V$  に含まれることは、代入すればわかる。

$$4x^3z - 3x^2y^2 - 6xyz + 4y^3 + z^2 = 0$$

## 具体例：ねじれ三次曲線 II

これが最小であることを，今のアルゴリズムで示そう．

$t > u > x > y > z$  となるような辞書式順序で Gröbner 基底を計算すると，以下の生成元が得られる：

$$g_1 = t + u - x \quad g_2 = u^2 - x^2 + y$$

$$g_3 = 2ux^2 - 2uy - 2x^3 + 3xy - z$$

$$g_4 = uxy - uz - x^2y - xz + 2y^2$$

$$g_5 = 2uxz - 2uy^2 + 2x^2z - xy^2 - yz$$

$$g_6 = 2uy^3 - 2uz^2 - 4x^2yz + xy^3 - 2xz^2 + 5y^2z$$

$$g_7 = 4x^3z - 3x^2y^2 - 6xyz + 4y^3 + z^2$$

以上より， $l_2 = I \cap k[x, y, z] = \langle 4x^3z - 3x^2y^2 - 6xyz + 4y^3 + z^2 \rangle$  がわかる．定理 1 より， $V(l_2)$  が TanC を含む最小の代数的集合であることがわかる．

## 具体例：ねじれ三次曲線 III

では、 $V(l_2)$  が  $\text{Tan}C$  と一致するだろうか？ $\mathbb{C}$  上で考えよう。上の生成元をよく見れば、 $g_2 \in l_1$  であり  $\text{LC}_u(g_2) = 1 \in k^\times$  となるので、拡張定理の系から  $V(l_2) = \pi_1[V(l_1)]$  となり、 $t, u$ -消去部分分解  $(x, y, z) \in V(l_2)$  は  $t$ -消去部分分解  $(u, x, y, z) \in V(l_1)$  に拡張されることがわかる。同様にして、 $\text{LC}_t(g_1) = 1$  より  $V(l_1) = \pi_1[V]$  となるので、任意の部分分解  $(x, y, z)$  は完全解  $(t, u, x, y, z)$  へ拡張されることがわかった。



## 具体例：ねじれ三次曲線 IV

Exercise 3-4 ( $\mathbb{R}$  上でも  $\text{Tan}C = V(g_7)$  となることを示せ.)

$x, y, z \in \mathbb{R} \cap V(g_7)$  のとき対応する  $t, u$  も実数となることを示せばよい.

Step 1.  $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow u \in \mathbb{R}$  を示す.  $(u, x, y, z) \in V(h_1)$  とする.  $x^2 \neq y$  とすると,  $g_3 = 0$  より  $2u(x^2 - y) - 2x^3 + 3xy - z = 0$  となるので,  $u = \frac{2x^3 - 3xy + z}{2(x^2 - y)}$  となり,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  より  $u \in \mathbb{R}$  となる. また,  $x^2 = y$  のときは, 定義方程式 (3.3) を変形すれば  $u = 0 \in \mathbb{R}$  となる. よって以上より  $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow u \in \mathbb{R}$ .

Step 2.  $u, x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in \mathbb{R}$  を示す.  $g_1 = 0$  に注目すれば,  $t = x - u \in \mathbb{R}$  となるので, これは明らかである.

以上より,  $\mathbb{R}$  においても  $\text{Tan}C = V(h_2)$  となることが示せた. ■

## 具体例：ねじれ三次曲線 $V$

Exercise 3-5 ( $t, u$  は  $x, y, z$  に対し一意に決まることを示せ)

先程の Step 2 より,  $u, x$  に対して  $t$  は一意に定まることがわかる. また, Step 1 から  $x^2 = y$  の場合も  $x^2 \neq y$  の場合も,  $x, y, z$  から  $u$  を決定する一次式が存在する. よって,  $x, y, z$  に対し  $t, u$  はただ一通りに決定される.

## 演習問題 I

### Exercise 3-6

$$S : \begin{cases} x = uv \\ y = u^2 \\ z = v^2 \end{cases} \text{ とする.}$$

- (a)  $S$  を含む最小の代数的集合  $V$  の定義式は何か？
- (b)  $\mathbb{C}$  上では  $V = S$  となることを示せ.
- (c)  $\mathbb{R}$  上では,  $S$  は  $V$  の「半分」しか覆わない. 残りの「半分」を覆うパラメタ表示は何か？

## 演習問題 II

- (a)  $I = \langle x - uv, y - u^2, z - v^2 \rangle$  において,  $u > v > x > y > z$  なる辞書式順序で Gröbner 基底を求めると,

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} g_1 = x^2 - yz, & g_2 = v^2 - z, & g_3 = uz - vx, \\ g_4 = ux - vy, & g_5 = uv - x, & g_6 = u^2 - y \end{array} \right\}$$

よって, 求める  $V$  の定義方程式は  $x^2 = yz$ .

- (b) 前の問から  $I_1 = \langle x^2 - yz, v^2 - z \rangle$  であることがわかる. 特に,  $LC_v(v^2 - z) = 1$  なので, 部分解  $(x, y, z)$  は部分解  $(v, x, y, z)$  に延長されることがわかる.  $LC_u(g_6) = 1$  なので, 更に完全解  $(u, v, x, y, z)$  へと延長されることがわかる.

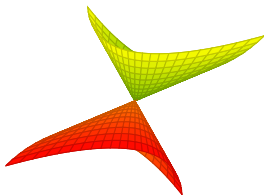
### 演習問題 III

- (c) まず完全解に伸びる部分解  $(x, y, z) \in V(l_2)$  の条件を求めておく.  $G$  を見ると,  $l_1 = \langle x^2 - yz, v^2 - z \rangle$  である. これより,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  の時,  $v \in \mathbb{R}$  となる必要十分条件は  $z \geq 0$  であることがわかる. 同様にして,  $g_6$  を見れば  $u, x, y, z \in \mathbb{R}$  のとき  $t \in \mathbb{R}$  となるのも  $y \geq 0$  の時だけだとわかる. また,  $g_1$  より  $x^2 = yz \geq 0$  となるので,  $y, z$  の符号は一致しなくてはならないことも判る. 以上より,  $S$  には  $y < 0, z < 0$  の場合が抜けている. そこで,

$$T : \begin{cases} x &= uv \\ y &= -u^2 \\ z &= -v^2 \end{cases}$$

とにおいて, この対応するイデアルを  $J$  としよう. 簡単な計算により  $J_2 = \langle x^2 - yz \rangle = l_2$  であることがわかり, 上と同様の議論によって,  $T$  に含まれるのは  $y \leq 0, z \leq 0$  の場合であることがわかる. よって, これが求める「残り半分」である.

## 演習問題 IV



### Exercise 3-7

$$S : \begin{cases} x = uv \\ y = uv^2 \\ z = u^2 \end{cases} \text{ とする.}$$

- (a)  $S$  を含む最小の代数的集合  $V$  を求めよ.
- (b)  $\mathbb{C}$  上で  $S$  に含まれない  $V$  の点があることを示せ. そのような点を全て決定せよ.

## 演習問題 V

- (a)  $I = \langle x - uv, y - uv^2, z - u^2 \rangle$  として上と同様に基底を求めると,

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} g_1 = x^4 - y^2z, & g_2 = vyz - x^3, & g_3 = vx - y, \\ g_4 = v^2z - x^2, & g_5 = uv - v^2z, & g_6 = ux - vz, \\ g_7 = uv - x, & g_8 = u^2 - z \end{array} \right\}$$

よって,  $I_2 = \langle g_1 \rangle = \langle x^4 - y^2z \rangle$  なので,  $V$  の定義方程式は  $x^4 = y^2z$  となる.

- (b)  $I_1 = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$  であり,  
 $LC_v(g_2) = yz, LC_v(g_3) = x, LC_v(g_4) = z$  となる. よって, 拡張定理から  $x \neq 0 \vee z \neq 0 \vee (y \neq 0 \wedge z \neq 0) \Leftrightarrow x \neq 0 \vee z \neq 0$  のとき,  $I_1$  の部分解  $(x, y, z)$  は必ず完全解  $(v, x, y, z)$  に拡張される. このとき,  $g_8$  に注目すれば  $LC_u(g_8) = 1$  より更に  $I$  の完全解  $(u, v, x, y, z)$  へと拡張されることがわかる. よって, 考えるべき場合は  $x = z = 0$  の場合である.

## 演習問題 VI

$x = z = 0$  を  $g_1 \dots, g_8$  に代入して 0 や重複を除けば,

$$g_3 = -y \quad g_5 = uv \quad g_8 = u^2$$

を得る. よって,  $y \neq 0$  のときは  $g_3$  が零点を持たなくなって  
しまうので完全解に伸びない.  $y = 0$  のときは, 特に  
 $(0, 0, 0, 0, 0) \in V(I)$  なので完全解に延長出来る.  
以上を纏めると,  $S$  に含まれない  $V$  の点全体は  
 $U = \{(x, y, z) \in V \mid x = z = 0, y \neq 0\}$  となる.



## 演習問題 VII

### Exercise 3-8 (Enneper Surface)

次の曲面を *Enneper Surface* と云う： $S : \begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ z = 3u^2 - 3v^2 \end{cases}$

(a)  $\bar{S} = V$  となる  $V$  を求めよ.

(b) 拡張定理を用いて,  $\mathbb{C}$  上で  $V = S$  となることを示せ.

$$\begin{aligned}
 & 19683x^6 - 59049x^4y^2 + 10935x^4z^3 + 118098x^4z^2 \\
 & - 59049x^4z + 59049x^2y^4 + 56862x^2y^2z^3 + 118098x^2y^2z \\
 & + 1296x^2z^6 + 34992x^2z^5 + 174960x^2z^4 - 314928x^2z^3 \\
 \text{(a)} \quad & - 19683y^6 + 10935y^4z^3 - 118098y^4z^2 - 59049y^4z \\
 & - 1296y^2z^6 + 34992y^2z^5 - 174960y^2z^4 - 314928y^2z^3 \\
 & - 64z^9 + 10368z^7 - 419904z^5 = 0
 \end{aligned}$$

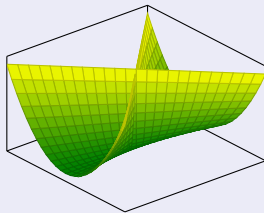
## 演習問題 VIII

- (b) Gröbner 基底をすべて書いていると死んでしまうので書かないが,  $2v^3 + vz + 3v - y$  や  $3u^2 - 3v^2 - z$  などが基底に含まれていることから延長されることが判る.

## 演習問題 IX

### Exercise 3-9 (Whitney の傘曲面)

$$S : \begin{cases} x &= uv \\ y &= v \\ z &= u^2 \end{cases}$$



- (a)  $\bar{S} = V$  となる  $V$  の定義方程式は何か？
- (b)  $\mathbb{C}$  上では  $S = V$  となるが、 $\mathbb{R}$  上では  $S \neq V$  であることを示し、含まれない点を特定せよ。
- (c)  $x, y, z$  から  $u, v$  が一意に定まるとは限らないことを示し、グラフとどう関連するかを論じよ。

## 演習問題 X

(a)  $I = \langle x - uv, y - v, z - u^2 \rangle$  の Gröbner 基底を計算すると,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} g_1 = x^2 - y^2z, \quad g_2 = v - y, \quad g_3 = uv - x, \\ g_4 = ux - yz, \quad g_5 = u^2 - z \end{array} \right\}$$

よって,  $V = V(x^2 - y^2z)$  となる (定義式:  $x^2 = y^2z$ ).

(b)  $\mathbb{C}$  上で  $S = V$ .  $LC_v(g_2) = 1, LC_u(g_5) = 1$  より OK.  
 $\mathbb{R}$  上で  $S \neq V$ . まず,  $g_2$  より任意の  $(x, y, z) \in V$  に対して  $v = y$  となるので,  $v$  には必ず伸びる.  $u$  まで拡張出来るかが問題である.

$(0, 0, -1)$  は  $V$  上の点. だが,  $u^2 = -1$  となるような  $u$  は取れないので,  $(0, 0, -1) \notin S$ .

より一般に  $z < 0$  のときは  $(x, y, z) \notin S$  となる.  $z \geq 0$  のときを考えよう.  $y \neq 0$  ならば  $g_3$  から  $u = \frac{x}{y}$  となる.  $y = 0$  のときは  $g_5$  より  $u = \pm\sqrt{z}$  が成立しなければいけないが, これ

## 演習問題 XI

は符号が正負どちらであっても他の式の根を与えることがわかる.

以上より,  $S$  上に無い点は  $z < 0$  の範囲のみであることがわかった.

- (c) たとえば,  $F(2, 0) = (0, 0, 4) = F(-2, 0)$  など. これは, 恰度グラフにおいて二つの曲面が交わっている (ように見える) 部分に含まれている. より詳しく,  $y \neq 0$  ならば上の議論から  $u$  は一意に決まるが,  $x = y = 0$  の時は  $u$  は  $\pm\sqrt{z}$  の二通りがあり, 一意性が崩れることがわかる. 以上より,  $\{(0, 0, z) \mid z > 0\}$ .

## 演習問題 XII

### Exercise 3-10

$f_i \in \mathbb{C}[t]$  により  $x_i = f_i(t)$  で表される  $\mathbb{C}^n$  の曲線を考える. このときイデアル  $I = \langle x_1 - f_1(t), \dots, x_n - f_n(t) \rangle \subseteq \mathbb{C}[t, x_1, \dots, x_n]$  が誘導される.

- (a) パラメタ表示が  $V(I_1)$  を覆うことを示せ.
- (b) 各  $f_i$  が有理函数の時に (a) の結論が不成立となる例を示せ.
- (c) 各  $f_i$  が多項式であっても, 係数が  $\mathbb{R}$  であれば a の結論が不成立となる例を示せ.

- (a) 各  $f_i$  が  $t$  を含まない場合は  $I_1 = I$  であるので明らか. そこで,  $f_i \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$  を満たすような  $f_i$  があつたとしてよい. このとき,  $\text{LC}_t(X_i - f(t)) = \text{LC}(f(t)) \in \mathbb{C}^\times$  であるので, 拡張定理の系から  $F(\mathbb{C}) = V(I_1) = \pi_1[V]$ . ■

## 演習問題 XIII

(b) 最初に見た例：

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

が正にそれになっている。  $V(I_1) = x^2 + y^2 - 1$  だが、 $(-1, 0) \notin V(I_1)$  である。

(c) 曲線  $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^6 \end{cases}$  を考える。  $I = \langle x - t^2, y - t^6 \rangle$  の

Gröbner 基底は  $G = \{x^3 - y, t^2 - x\}$  である。 よって、 $V(I_1) = V(x^3 - y)$ 。 しかし、 $(-1, -1) \in V(I_1)$  だが  $x, y < 0$  なので明らかに  $(-1, -1) \notin C$ 。

