代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 07 月 01 日

有理写像の陰関数表示

- 前回は多項式パラメタ表示の陰関数表示について勉強した.

$\longrightarrow$ 今回は有理写像の陰関数問題を考察する.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{f_1(T_1,\dots,T_m)}{g_1(T_1,\dots,T_m)} \\
&\vdots \\
X_n &= \frac{f_n(T_1,\dots,T_m)}{g_1(T_n,\dots,T_m)} \quad (f_i, g_i \in k[\mathbf{T}])
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

- 分母があるので，有理写像は k^m 全域では定義出来ない.
- $W = V(g_1 \cdot \cdots \cdot g_n)$ として $k^m \setminus W$ 上で考えれば定義出来る

$$
\begin{array}{ccc}
F : k^m \setminus W & \longrightarrow & k^n \\
\cup & & \cup \\
\mathbf{T} & \longmapsto & \left(\frac{f_1(\mathbf{T})}{g_1(\mathbf{T})}, \dots, \frac{f_n(\mathbf{T})}{g_n(\mathbf{T})}\right)
\end{array}
$$

素朴にやっても上手くいかない例

次で定義される曲面を考える．

$$\begin{cases} x = \frac{u^2}{v} \\ y = \frac{v^2}{u} \\ z = u \end{cases} \tag{3.2}$$

- 分母を払って多項式環のイデアルを作り，それに多項式写像の場合の方法を適用出来ないか？

$$I := \langle vx - u^2, uy - v^2, z - u \rangle \subseteq k[u, v, x, y, z]$$

- $V(I_2) = V(z) \cup V(x^2y - z^3)$ が最小になりそうな気がする．
- しかし，$z = 0$ とすると明らかに完全解に伸びない．つまり，$V(z)$ の部分が完全に無駄だ！

$\longrightarrow$ 単に「分母を払う」だけでは素朴すぎて上手くいかない！

有理写像にふさわしいイデアル I

前回のように写像

$$
\begin{array}{cccc}
i: & k^m & \longrightarrow & k^{n+m} \\
 & \cup & & \cup \\
 & \mathbf{T} & \longmapsto & (\mathbf{T}, f_1(\mathbf{T}), \ldots, f_n(\mathbf{T}))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\pi_m: & k^{n+m} & \longrightarrow & k^n \\
 & \cup & & \cup \\
 & (\mathbf{T}, \mathbf{X}) & \longmapsto & \mathbf{X}
\end{array}
$$

を考えると，次の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & k^{n+m} \arrow[dr, "\pi_m"] & \\
k^m \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "F"'] & & k^n
\end{tikzcd}
$$

有理写像にふさわしいイデアル II

- $i[k^m \setminus W] \subseteq V(I)$ を満たすことは示せても，これらが一致するとは限らない！
  - そのせいで，さっきの例では上手くいかなかった．
- 分母をコントロールするために，余分な次元を一つ足そう
- $g = g_1 \cdots g_n$ として，次のイデアル J を考える：

$$J := \langle g_1 X_1 - f_1, \ldots, g_n X_n - f_n, 1 - gY \rangle \subseteq k[Y, \mathbf{T}, \mathbf{X}]$$

- $1 - gY$ のおかげで，各分母 g_i が $V(J)$ 上では消えないようになる筈だ！

有理写像にふさわしいイデアル III

次の写像を考える．

$$
\begin{array}{rccc}
j: & k^m \setminus W & \longrightarrow & k^{n+m+1} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & \mathbf{t} & \longmapsto & \left(\frac{1}{g(\mathbf{t})}, \mathbf{t}, \frac{f_1(\mathbf{t})}{g_1(\mathbf{t})}, \ldots, \frac{f_n(\mathbf{t})}{g_n(\mathbf{t})}\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\pi_{m+1}: & k^{n+m+1} & \longrightarrow & k^n \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & (y, \mathbf{t}, \mathbf{x}) & \longmapsto & \mathbf{x}
\end{array}
$$

これを使って，次の可換図式を得る：

有理写像にふさわしいイデアル IV

$$
\begin{tikzcd}
 & k^{n+m+1} \arrow[dr, "\pi_{m+1}"] & \\
k^m \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "F"'] & & k^n
\end{tikzcd}
$$

これは実際に可換となる：

$$
\begin{aligned}
(\pi_{m+1} \circ j)(t_1, \ldots, t_m) &= \pi_{m+1} \left(\frac{1}{g(\mathbf{t})}, t_1, \ldots, t_m, \frac{f_1(\mathbf{t})}{g_1(\mathbf{t})}, \ldots, \frac{f_n(\mathbf{t})}{g_n(\mathbf{t})} \right) \\
&= \left(\frac{f_1(\mathbf{t})}{g_1(\mathbf{t})}, \ldots, \frac{f_n(\mathbf{t})}{g_n(\mathbf{t})} \right) \\
&= F(\mathbf{t})
\end{aligned}
$$

有理写像にふさわしいイデアル V

更に，$j[k^m \setminus W] = V(J)$ が成立する．

Proof.

$\subseteq$ の方向は明らか．逆向きの包含関係を示す．$(y, \mathbf{t}, \mathbf{x}) \in V(J)$ とする．特に，$g(\mathbf{t})y = 1$ なので，各 $g_i(\mathbf{t}) \neq 0$ であるから，
$y = \frac{1}{g(\mathbf{t})}$．また，

$$
\begin{aligned}
(g_i X_i - f_i)(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = 0 & \Leftrightarrow g_i(\mathbf{t}) x_i - f_i(\mathbf{t}) = 0 \\
\Leftrightarrow g_i(\mathbf{t}) x_i = f_i(\mathbf{t}) &
\end{aligned}
$$

ここで $g_i(\mathbf{t}) \neq 0$ に注意すれば，

$$
\Leftrightarrow x_i = \frac{f_i(\mathbf{t})}{g_i(\mathbf{t})}
$$

以上より $(y, \mathbf{t}, \mathbf{x}) = j(\mathbf{t}) \in j[k^m \setminus W]$．よって示された． ∎

有理写像の陰関数表示 I

以上を踏まえて，有理写像によるパラメタ表示の陰関数表示を得ることが出来る．

Th. 1 (有理写像の陰関数表示)

$\#k = \infty \qquad F = (f_1, \ldots, f_n) \qquad f_i \in k(\mathbf{T}) \qquad g = g_1 \ldots g_n$

$$I = \langle g_1 X_1 - f_1, \ldots, g_n X_n - f_n, 1 - gY \rangle \subseteq k[Y, \mathbf{X}, \mathbf{T}]$$

とする．このとき，$\overline{F[k^m \setminus W]} = V(I_{m+1}) \subseteq k^n$.

証明はほぼ多項式写像のときと同じ．代数閉体のときは OK．問題は一般の $\#k = \infty$ の時．この時，次を示す必要がある．

有理写像の陰関数表示 II

Claim

$\#k = \infty, f, g \in k[\mathbf{T}], g \neq 0$ とする．f が $k^m \setminus V(g)$ 上で常にゼロとなるならば，$f = 0$ である．

この主張さえ示せれば，後は前回と同様に係数を拡大して代数閉包で作業をすることが出来るので，証明は完了する．

主張の証明（演習問題 11）．

$\mathbf{t} \in k^m \setminus V(g)$ とすると，前提より $f(\mathbf{t}) = 0$ となり，特に $(fg)(\mathbf{t}) = 0$ である．
また，$\mathbf{t} \in V(g)$ とすれば，$(fg)(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t})g(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t})0 = 0$.
よって，fg は k^m 上消える．k は無限体だから $fg = 0$（ゼロ多項式）となるが，$g \neq 0$ なので，$k[\mathbf{T}]$ が整域であることから $f = 0$ となる．よって示された．∎

Exercise 3-12

$k = \mathbb{C}$ とする．(3.2) で考えた次の曲面について考える：

$$\begin{cases} x = \frac{u^2}{v} \\ y = \frac{v^2}{u} \\ z = u \end{cases}$$

(a) $I_2 = \langle z(x^2y - z^3) \rangle$ を示せ．

(b) $\overline{i[\mathbb{C}^2 \setminus W]} = V(vx - u^2, uy - v^2, z - u, x^2y - z^3, vz - xy)$

(c) $\{\,(0, 0, x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{C}\,\} \subseteq V(I)$ を示し，$V(I) \neq \overline{i[\mathbb{C}^2 \setminus W]}$ を示せ．

(d) (3.2) によりパラメタ表示されるのは $x^2y = z^3$ のどの部分か？

問題演習 II

(a) $u > v > x > y > z$ なる lex で Gröbner 基底を求めると，

$$G = \left\{ \begin{array}{c} g_1 = x^2yz - z^4, \quad g_2 = vz^2 - xyz \\ g_3 = vx - z^2, \quad g_4 = v^2 - yz, \quad g_5 = u - z \end{array} \right\}$$

よって，$I_2 = \langle x^2yz - z^4 \rangle$ である． $\blacksquare$

(b) $J = \langle vx - u^2, uy - v^2, z - u, vut - 1 \rangle$ とおいて，辞書式順序で Gröbner 基底を求める：

$$G' = \left\{ \begin{array}{c} g_1 = x^2y - z^3, \quad g_2 = vz - xy \\ g_3 = vx - z^2, \quad g_4 = v^2 - yz, \quad g_5 = u - z \\ g_6 = tz^3 - x, \quad g_7 = tyz^2 - v, \quad g_8 = txy - 1 \end{array} \right\}$$

このとき，$i[\mathbb{C}^2 \setminus W] = \pi_1[V(J)]$ となることを示そう．
$(u, v, u^2/v, v^2/u, u) \in i[\mathbb{C}^2 \setminus W]$ とする．特に，
$(u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus W$ なので，$u \neq 0, v \neq 0$．よって uv の逆元が

問題演習 III

存在するので，　$t = (uv)^{-1}$ とおこう．$(t, u, v, u^2/v, v^2/u, u)$ を J の生成元に代入すれば，いずれもゼロとなることがわかる．よって $(u, v, u^2/v, v^2/u, u) \in \pi_1[V(J)]$ である．
また，$(u, v, x, y, z) \in \pi_1[V(J)]$ とすると，

$$\exists t \in \mathbb{C}\,[vx - u^2 = 0, u - z = 0, ux - v^2, t = 1/uv]$$

となる．特に $u, v \neq 0$ であることに注意すれば，
$(u, v, x, y, z) \in i[\mathbb{C} \setminus W]$ となる．
以上より，

$$\overline{i[\mathbb{C}^2 \setminus W]} = \overline{\pi_1[V(J)]} = V(J_1) \quad (\because \text{閉包定理})$$

問題文で与えられた図形の定義式に対し被約 Gröbner 基底を計算すれば，J_1 の生成元と一致することがわかる．よって示された．∎

問題演習 IV

(c) I の定義式に $(u, v, x, y, z) = (0, 0, x, y, 0)$ を代入してやれば $(0, 0, x, y, 0) \in V(I)$ となることは明らか．特に $(0, 0, 1, 1, 0) \in V(I)$．しかし，J_1 の生成元にこれを代入すると，$1 = 0$ となってしまい矛盾．よって $(0, 0, 1, 1, 0) \notin V(J_1) = \overline{i[\mathbb{C}^2 \setminus W]}$．よって一致しないことがわかる．

別解．I の被約 Gröbner 基底 と J_1 の被約 Gröbner 基底を見比べると，一致しない．よって $V(I) \neq V(J_1)$ ∎

(d) G' の元を見ると，$\mathrm{LC}_v(g_4) = 1 \in \mathbb{C}^\times, \mathrm{LC}_u(g_5) = 1 \in \mathbb{C}^\times$ であるので，部分解 $(x, y, z) \in V(J_3)$ は $(u, v, x, y, z) \in V(J_1)$ まで簡単に延長されることが判る．問題はこれが完全解 $(t, u, v, x, y, z) \in V(J)$ に拡張されるかどうかである．

g_6, g_7, g_8 の先頭項係数に注目すると，

$$z^3 \qquad yz^2 \qquad xy$$

問題演習 V

のいずれか一つでも消えなければ，拡張定理から完全解に拡張されることがわかる．即ち，

$$z \neq 0 \vee (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$$

ならば完全解に伸びる．
そこで，$z = 0 \wedge (x = 0 \vee y = 0)$ とする．$z = 0$ のとき，g_6 から $x = 0$，g_7 より $v = 0$ となることがわかる．この状態で (u, v, x, y, z) が完全解に伸びたと仮定しよう．すると，g_8 にこれらを代入すれば，$-1 = 0$ となってしまい矛盾．よって $z = 0$ のときは決して完全解に伸びないことがわかる．
以上より，$x^2y = z^3$ のうち (3.2) でパラメトライズされるのは $z \neq 0 \vee xy \neq 0$ の部分のみである．

問題演習 VI

Exercise 3-13 (有理写像でも簡単にパラメタを除去出来る場合)

$X_i = f_i(T)/g_i(T) \quad f_i, g_i \in k[T], \qquad g(T) = g_1(T)\dots g_n(T)$ と一変数でパラメトライズされている場合を考える．各 i について，f_i と g_i が互いに素の時（即ち共通因子を持たない時），$I = \langle g_iX_i - f_i \,|\, 1 \leq i \leq n\rangle$ とすれば $V(I_1) = \overline{i[\mathbb{C} \setminus V(g)]}$ となることを示せ．

Step 1. $i[k \setminus W] = V(I)$ を示す．$\subseteq$ は明らかなので，反対の包含関係を示そう．$(t, x_1, \dots, x_n) \in V(I)$ とする．このとき $g_i(t) \neq 0$ かつ $x_i = f_i(t)/g_i(t)$ となることを示せばよい．I の定義より $g_i(t)x_i = f_i(t)$ である．$g_i(t) = 0$ とすると，$f_i(t) = g_i(t)x_i = 0$. よって因数定理より，
$g(T) = (T - t)g'(T), f(T) = (T - t)h'(T) \quad (\exists g', h' \in k[T])$ と書ける．しかし，仮定より f_i, g_i は互いに素であるので矛盾．よっ

て $g_i(t) \neq 0$. 従って $x_i = f_i(t)/g_i(t)$ となる. よって Step 1 は OK.

Step 2. $F[k \setminus W] = \pi_1[i[k \setminus W]] = \pi_1[V(I)]$ である. あとは多項式写像についての陰関数表示の定理と同様にして $\overline{F[k \setminus W]} = \overline{\pi_1[V(I)]} = V(I_1)$ となることがわかる. ∎

Exercise 3-14 (デカルトの正葉線)

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

(a) 上の曲線の定義方程式を見付けよ.

(b) パラメタ表示が, $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ 上でともに上で見付けた曲線全体を覆うことを示せ.

問題演習 VIII

(a) 通常の消去法を適用してもよいが，これは一変数によるパラメタ表示であり，よく見ると各分子・分母は互いに素である．よって，先程の演習問題の結果が使える．そこで，

$$I := \langle (1+t^3)x - 3t, (1+t^3)y - 3t^2 \rangle \subseteq k[t,x,y]$$

とおく．この Gröbner 基底を計算すると，

$$G = \left\{ \begin{matrix} g_1 = x^2 - 3xy, & g_2 = ty^2 + x^2 - 3y \\ g_3 = 3tx - ty^2 - x^2, & g_4 = t^2y - 3t + x \end{matrix} \right\}$$

となる．よって $I_1 = \langle x^3 - 3xy + y^3 \rangle$ となるので，求める定義方程式は $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ である．

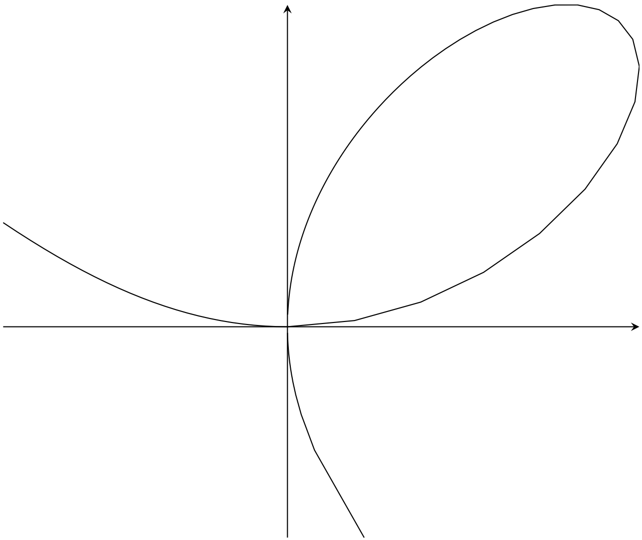
問題演習 IX

(b) $\mathbb{C}$ 上の場合．先程求めた基底を睨むと，拡張定理から

$$y^2 \quad x \quad y$$

のいずれかがゼロでなければ全域の伸びることがわかる．つまり，$x \neq 0 \vee y \neq 0$ ならば OK．
そこで，$x = y = 0$ とする．このとき，特に $(0, 0, 0) \in V(I)$ となるので，これも完全解に伸びる．以上より，$\mathbb{C}$ 上ではパラメタ表示による曲線は $V(I)$ と一致する．
$\mathbb{R}$ 上の場合．実数 x, y について，$\mathbb{C}$ での部分解 $(x, y) \in V(I_1)$ が複素完全解 $(t, x, y) \in V(I)$ に延長されるなら，$t \in \mathbb{R}$ となることを示す．$x = y = 0$ の場合は上の議論から OK．$y \neq 0$ とすると，g_2 を変形すれば $t = \frac{3y - x^2}{y^2} \in \mathbb{R}$ となる．$y = 0$ かつ $x \neq 0$ とすると，g_3 より $t = x/3 \in \mathbb{R}$ となる．いずれの場合も，$t \in \mathbb{R}$ となるので，$\mathbb{R}$ 上でも一致することがわかる．$\blacksquare$

問題演習 X



3.4 特異点と包絡線

消去理論の応用として，以下では次の話題を扱う．

- 曲線の特異点
- 曲線族の包絡線
    - 完全には厳密にはやらない
    - 正当化に微分積分を用いる

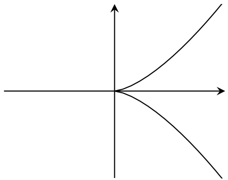
必要な部分だけ少し扱う．それぞれの問題だけで一冊本が書けるレベル．

特異点

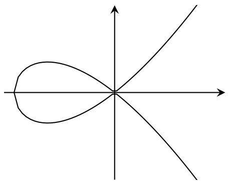
- 多項式 $f \in k[x, y]$ により $f(x, y) = 0$ で定義される平面 k^2 上の曲線について考える
- $V(f)$ の大抵の点で接線が定義されていてほしい

$\longrightarrow$ 交差していたり，ねじれていたりすると上手くいかない！

$y^2 = x^3$



$y^2 = x^2(1 + x)$



- 特異点 $=$ 接線が定義できない点
- 「接線」の代数的な定義が必要

接線 I

- $V(f)$ 上の点 (a,b) を通る直線は，直線と平行なベクトル $(c,d) \neq \mathbf{0}$ を使って次のように書ける：

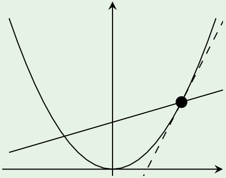
$$\begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases} \tag{3.1}$$

- (c,d) を変化させれば (a,b) を通るすべての直線が得られる

$\longrightarrow$ その中から微積分を使わずにどうやって接線を見付けるか？

接線 II

Example. (放物線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ の接線 L)



$(1, 1)$ を通る直線は次の様に書ける：

$$L : \begin{cases} x = 1 + ct \\ y = 1 + dt \end{cases} \tag{3.2}$$

微積分を使えば，接線になるのは傾き 2 の時だと判る．代数的にこれを見付けるにはどうする？

(3.2) を $y - x^2$ に代入し多項式 $g(t) = t(-c^2 t + d - 2c)$ を得る．

- $d \neq 2c$ のとき，$c \neq 0$ なら異なる二根，$c = 0$ なら根を一つだけ持つ．
- $d = 2c$ のとき，g は二重根を持つ．

$\Longrightarrow$ 接線になるかは $g(t)$ が重根を持つかを見ればわかる！

接線 III

Def. 1

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$　$(a, b) \in V(f)$　L : (a,b) を通る直線 とする.
L が (a, b) で $V(f)$ と重複度 k で交わる

$$\overset{\text{def}}{\iff} L : \begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$$ と書けて，$t = 0$ が

$g(t) = f(a + ct, b + dt)$ の k-重根になっている.

Rem.

- $(a, b) \in V(f)$ より $g(0) = f(a, b) = 0$ なので，$t = 0$ は常に $g(t)$ の根である.
- $t = 0$ が $g(t)$ の n-重根 $\Leftrightarrow \exists h \in k[t]\,[g(t) = t^n h(t), h(0) \neq 0]$
- 重複度がパラメタ表示に依らないことを示す必要がある.
    - やれば出来るので省略（演習問題 2）.

接線 IV

Exercise 3-1

曲線 $C : f(x,y) = x^3 - xy + y^2 - 1 = 0$ を考えると $(1,1) \in C$ である．$(1,1)$ を通る直線と $(1,1)$ の交わりの重複度を計算せよ．接線との関係は何か？

$g(t) = f(1+ct, 1+dt) = t(c^3t^2 + (3c^2+d^2-cd)t + 2c + d)$.

$2c+d=0$ のとき　このとき $g(t) = t^3(c^3t + 3c^2 + d^2 - cd)$.
$3c^2 + d^2 - cd = 0$ とすると $9c^2 = 0$ となり
$c = d = 0$ となってしまうので $(c,d) \neq 0$ に矛盾．
よって $g(t)/t^2$ の定数項 $3c^2 + d^2 - cd$ は消えない．
よって，この時の重複度は 2.

$2c+d \neq 0$ の時　$g(t)/t$ の定数項が消えないので，重複度は 1.

$f(x,y) = 0$ を x で微分すると，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - y - xy' + 2yy' = 0$.
よって $y'(x) = \frac{-3x^2+y}{2y-x}$ なので，$(1,1)$ での接線の傾きは -2．これは，上で重複度 2 の場合に相当する．

接線 V

- どうも重複度が 2 以上の場合が重要に思える
  $\longrightarrow$ そうなる条件は？

Prop. 2

$f \in k[x, y], (a, b) \in V(f)$

1. $\nabla f(a, b) \neq 0$ ならば，(a, b) で $V(f)$ と重複度 2 以上で交わる直線が唯一つ存在する．
2. $\nabla f(a, b) = 0$ なら，(a, b) を通る任意の直線は $V(f)$ で重複度 2 以上で交わる．

この証明には次の命題を示す必要がある．

Claim (演習問題 5)

$\mathrm{char}\, k = 0, g(t) \in k[t], g(0) = 0$ とする．

(a) $t = 0$ が $g(t)$ の重複度 2 以上の根 $\Leftrightarrow g'(0) = 0$

(b) $t = 0$ が $g(t)$ の重複度 k 以上の根
$\Leftrightarrow g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(k-1)}(0) = 0$

証明の方針.

(b) は (a) を繰り返し適用すれば出来る．(a) についても，$(\Rightarrow)$ は $g(t) = t^2 h(t)$ とおいて微分すれば簡単にわかる．$(\Leftarrow)$ も $g(t) = th(t)$ とおけば，$g'(t) = 0$ から $h(0) = 0$ がわかるので，重複度が 2 以上であることがわかる． ∎

この証明が済んでしまえば，命題の証明は殆んど自明.

接線 VII

Def. 3 (接線，特異点)

$f \in k[x, y], (a, b) \in V(f)$ とする.

1. $\nabla f(a, b) \neq 0$ のとき，(a, b) を $V(f)$ の非特異点と云う．また，この時 (a, b) で $V(f)$ と重複度 2 以上で交わる一意な直線のことを，$V(f)$ の (a, b) における接線と呼ぶ.
2. $\nabla f(a, b) = 0$ のとき，(a, b) は $V(f)$ の特異点であると云う.

- $\nabla f(a, b) = 0$ は，$\mathbb{R}$ で解釈すると接線に対する法線であると見ることが出来る.

特異点の計算法

$V(f)$ の特異点を計算するには，$f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解けば良い．

Example 4 ($y^2 = x^2(1+x)$ の特異点)

$f(x,y) = y^2 - x^2 - x^3$ とおけば，特異点は

$$\begin{cases} f = y^2 - x^2 - x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

の解．これを解けば $x = y = 0$ が唯一の特異点だと判る．先程のグラフと突き合わせれば，確かにそんな感じがする．

- 特異点の計算法は他にも沢山ある．
- 第 9 章では任意のアフィン多様体の特異点について考える．