

代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013年07月01日

3.4 特異点と包絡線

消去理論の応用として、以下では次の話題を扱う。

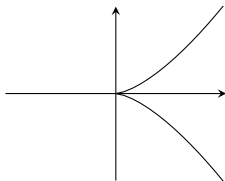
- 曲線の特異点
- 曲線族の包絡線
 - 完全には厳密にはやらない
 - 正当化に微分積分を用いる

必要な部分だけ少し扱う。それぞれの問題だけで一冊本が書けるレベル。

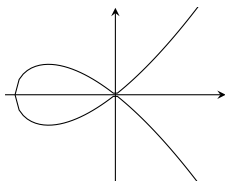
特異点

- 多項式 $f \in k[x, y]$ により $f(x, y) = 0$ で定義される平面 k^2 上の曲線について考える
 - $V(f)$ の大抵の点で接線が定義されていてほしい
- 交差していたり、ねじれていたりと上手くいかない！

$$y^2 = x^3$$



$$y^2 = x^2(1+x)$$



- 特異点 = 接線が定義できない点
- 「接線」の代数的な定義が必要

接線 I

- $V(f)$ 上の点 (a, b) を通る直線は, 直線と平行なベクトル $(c, d) \neq \mathbf{0}$ を使って次のように書ける:

$$\begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases} \quad (4.1)$$

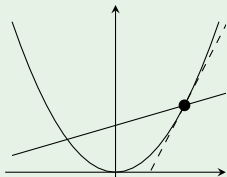
- (c, d) を変化させれば (a, b) を通るすべての直線が得られる
→ その中から微積分を使わずにどうやって接線を見付けるか?

接線 II

Example. (放物線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ の接線 L)

$(1, 1)$ を通る直線は次の様に見える :

$$L: \begin{cases} x = 1 + ct \\ y = 1 + dt \end{cases} \quad (4.2)$$



微積分を使えば、接線になるのは傾

き 2 の時だと判る。代数的にこれを見付けるにはどうする？

(4.2) を $y - x^2$ に代入し多項式 $g(t) = t(-c^2t + d - 2c)$ を得る。

- $d \neq 2c$ のとき、 $c \neq 0$ なら異なる二根、 $c = 0$ なら根を一つだけ持つ。
- $d = 2c$ のとき、 g は二重根を持つ。

⇒ 接線になるかは $g(t)$ が重根を持つかを見ればわかる！

接線 III

Def. 1

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(a, b) \in V(f)$ $L: (a, b)$ を通る直線 とする.

L が (a, b) で $V(f)$ と重複度 k で交わる

$\stackrel{\text{def}}{\iff} L: \begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$ と書いて, $t = 0$ が

$g(t) = f(a + ct, b + dt)$ の k -重根になっている.

Rem.

- $(a, b) \in V(f)$ より $g(0) = f(a, b) = 0$ なので, $t = 0$ は常に $g(t)$ の根である.
- $t = 0$ が $g(t)$ の n -重根 $\iff \exists h \in k[t] [g(t) = t^n h(t), h(0) \neq 0]$
- 重複度がパラメタ表示に依らないことを示す必要がある.
 - やれば出来るので省略 (演習問題 2).

接線 IV

Exercise 4-1

曲線 $C : f(x, y) = x^3 - xy + y^2 - 1 = 0$ を考えると $(1, 1) \in C$ である. $(1, 1)$ を通る直線と $(1, 1)$ の交わりの重複度を計算せよ. 接線との関係は何か?

$$g(t) = f(1 + ct, 1 + dt) = t(c^3t^2 + (3c^2 + d^2 - cd)t + 2c + d).$$

$2c + d = 0$ のとき このとき $g(t) = t^3(c^3t + 3c^2 + d^2 - cd)$.

$$3c^2 + d^2 - cd = 0 \text{ とすると } 9c^2 = 0 \text{ となり}$$

$c = d = 0$ となってしまうので $(c, d) \neq 0$ に矛盾.

よって $g(t)/t^2$ の定数項 $3c^2 + d^2 - cd$ は消えない.

よって, この時の重複度は 2.

$2c + d \neq 0$ の時 $g(t)/t$ の定数項が消えないので, 重複度は 1.

$$f(x, y) = 0 \text{ を } x \text{ で微分すると, } \frac{df}{dx} = 3x^2 - y - xy' + 2yy' = 0.$$

よって $y'(x) = \frac{-3x^2 + y}{2y - x}$ なので, $(1, 1)$ での接線の傾きは -2 . これは, 上で重複度 2 の場合に相当する.

接線 V

- どうも重複度が 2 以上の場合が重要に思える
→ そうなる条件は？

Prop. 2

$f \in k[x, y], (a, b) \in V(f)$

- ① $\nabla f(a, b) \neq 0$ ならば, (a, b) で $V(f)$ と重複度 2 以上で交わる直線が唯一つ存在する.
- ② $\nabla f(a, b) = 0$ なら, (a, b) を通る任意の直線は $V(f)$ で重複度 2 以上で交わる.

この証明には次の命題を示す必要がある.

Claim (演習問題 5)

$\text{char} k = 0, g(t) \in k[t], g(0) = 0$ とする.

(a) $t = 0$ が $g(t)$ の重複度 2 以上の根 $\Leftrightarrow g'(0) = 0$

(b) $t = 0$ が $g(t)$ の重複度 k 以上の根
 $\Leftrightarrow g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$

証明の方針.

(b) は (a) を繰り返し適用すれば出来る. (a) についても, (\Rightarrow) は $g(t) = t^2 h(t)$ とおいて微分すれば簡単にわかる. (\Leftarrow) も $g(t) = t h(t)$ とおけば, $g'(t) = 0$ から $h(0) = 0$ がわかるので, 重複度が 2 以上であることがわかる. ■

この証明が済んでしまえば, 命題の証明は殆んど自明.

接線 VII

Def. 3 (接線, 特異点)

$f \in k[x, y], (a, b) \in V(f)$ とする.

- ① $\nabla f(a, b) \neq 0$ のとき, (a, b) を $V(f)$ の**非特異点**と云う. また, この時 (a, b) で $V(f)$ と重複度 2 以上で交わる一意な直線のことを, $V(f)$ の (a, b) における**接線**と呼ぶ.
 - ② $\nabla f(a, b) = 0$ のとき, (a, b) は $V(f)$ の**特異点**であると云う.
- $\nabla f(a, b) = 0$ は, \mathbb{R} で解釈すると接線に対する法線であると見ることが出来る.

特異点の計算法

$V(f)$ の特異点を計算するには、 $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解けば良い。

Example 4 ($y^2 = x^2(1+x)$ の特異点)

$f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ とおけば、特異点は

$$\begin{cases} f = y^2 - x^2 - x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

の解。これを解けば $x = y = 0$ が唯一の特異点だと判る。先程のグラフと突き合わせれば、確かにそんな感じがする。

- 特異点の計算法は他にも沢山ある。
- 第9章では任意のアフィン多様体の特異点について考える。

演習問題 I

Exercise 4-3 (円の接線)

次の直線 L を考える：

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = t + b \end{cases}$$

これは、傾き 1, y -切片 b の直線である。これが円 $x^2 + y^2 = 1$ と接するための b の条件を求めよ。絵を描いて結果を説明せよ。

$g(t) = (t)^2 + (t + b)^2 - 1 = 2t^2 + 2bt + (b^2 - 1)$ とおく。この根により、円と L の交点が見える。

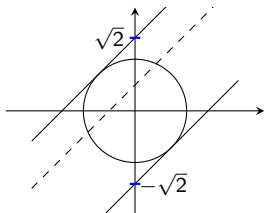
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{2 - b^2}}{2}$$

演習問題 II

特に、一点でのみ交わるときに円と直線が接するので、
 $2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{2}$ の時が求める場合である。実際、

$$\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}} + t\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} + t\right) - 1 = 2t^2$$

となり、この時重複度が 2 となるので、接することがわかる。



演習問題 III

Exercise 4-7 (重複度 > 2 となる接線)

以下、 $C : y = f(x)$ で表される曲線 C を考える。

- (a) C の $(a, f(a))$ における接線が次で与えられることを代数的に証明せよ：

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = f(a) + f'(a)t \end{cases}$$

- (b) $(a, f(a))$ と接線が重複度 ≥ 3 で交わる必要十分条件は $f''(a) = 0$ であることを示せ。
- (c) 重複度 $= 3$ となる必要十分条件は $f''(a) = 0$ かつ $f'''(a) \neq 0$ となることであることを示せ。
- (d) \mathbb{R} 上の変曲点とは、 $f''(x)$ の符号が変化する点のことである。重複度が 3 であれば、 $(a, f(a))$ は変曲点となることを示せ。

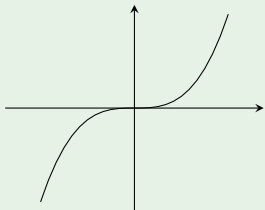
演習問題 IV

- (a) $F(x, y) = f(x) - y$ とおけば, $F(x, y) = 0$ が C の定義式. そこで, $g(t) = F(a+t, f(a) + f'(a)t) = f(a+t) - f(a) - f'(a)t$ とおいて, $t=0$ が $g(t)$ の重根であることを示す. 演習問題 5 より, 特に $g(0) = g'(0) = 0$ を示せばよい.
 $g(0) = f(a) - f(a) - f'(a) \cdot 0 = 0$. また,
 $g'(t) = f'(a+t) - f'(a)$ より $g'(0) = f'(a) - f'(a) = 0$. よって接線となることがわかった.
- (b) $g''(0) = 0$ となれば良い. $g''(t) = f''(a+t)$ より
 $g''(0) = 0 \Leftrightarrow f''(a) = 0$.
- (c) 明らか.
- (d) 前問より $f''(a) = 0$ かつ $f'''(a) \neq 0$. $f'''(a) \neq 0$ より, $f''(x)$ は $x = a$ で狭義単調増加または狭義単調減少. よって $f''(a)$ で符号が変化することがわかる.

演習問題 V

Example. (重複度 = 3 となる例)

例えば $y = x^3$ を考える.



この時, 原点での接線は

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$

で与えられる (x 軸).

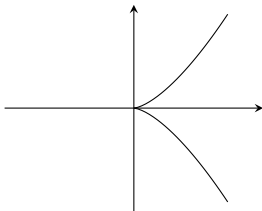
$f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$ より, $f(0) = 0, f'(0) = f''(0) = 0, f'''(0) = 6 \neq 0$. よって多重度 3 であり, 確かに変曲点で交わっていることがわかる.

演習問題 VI

Exercise 4-8 (特異点の計算)

- (a) $(0, 0)$ が $y^2 = x^3$ の唯一の特異点であることを示せ.
 - (b) $y^2 = cx^2 - x^3$ の全ての特異点を求めよ (c : 定数). グラフとどう関係するか?
 - (c) 円 $x^2 + y^2 = a^2$ が特異点を持たない事をしめせ ($a > 0$).
-
- (a) $f(x, y) = x^3 - y^2$ とおく. このとき $\nabla f(x, y) = (3x^2, -2y)$ であり, $\nabla f = (0, 0)$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のときのみ. また, $f(0, 0) = 0$ であるので $(0, 0)$ は曲線上の点である. よって $y^2 = x^3$ の特異点は $(0, 0)$ のみである.

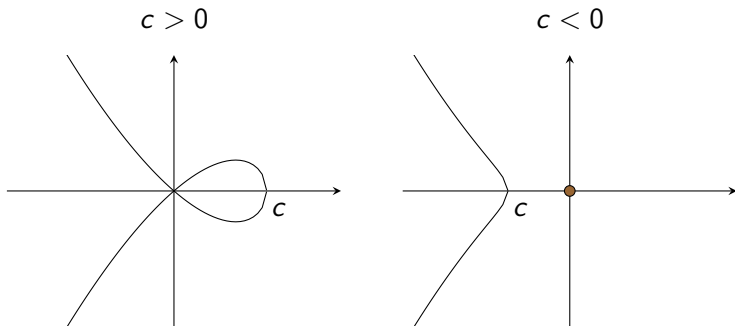
演習問題 VII



(b) $f(x, y) = cx^2 - x^3 + y^2$ とおく. $\nabla f = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0), (\frac{2}{3}c, 0)$ となるときのみ. 代入すると, $f(0, 0) = 0, f(\frac{2}{3}c, 0) = \frac{4}{27}c^3$ であるので, $(\frac{2}{3}c, 0)$ が特異点となるのは $c = 0$ のときのみで, このときも結局 $(0, 0)$ が唯一の特異点となる.

$c > 0$ の時はちょうど原点が交点になっている. $c < 0$ のときは, 原点はどことも接続しておらず, なるほど特異点となっていることがわかる.

演習問題 VIII



- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - a^2$ とおくと $\nabla f = 0$ となるのは $(0, 0)$ のみだが, これは明らかに円上にはない. よって特異点はない.

演習問題 IX

Exercise 4-9 (重複度と特異点)

特異点の「性質の悪さ」を示す指標として、重複度を用いることが出来る。

- (a) 曲線 $y^2 = x^3$ において、原点を通る直線の殆んどすべてが重複度 2 で曲線と交わることを示せ。
- (b) 曲線 $x^4 + 2xy^2 + y^3 = 0$ について、原点を通る全ての直線は重複度 3 以上で曲線と交わることを示せ。

↪ 原点の特異点は、二番目の曲線のほうが「性質がわるい」

↪ 背後にある考え方を使えば、特異点の「重複度」が定義出来る！

演習問題 X

- (a) $g(t) = (ct)^3 - (dt)^2 = t^2(c^3t - d^2)$ を考える. $d = 0$ なら $c \neq 0$ であり, このとき重複度 3. $d \neq 0$ ならば常に重複度 2. よって有限個を除いて全ての直線は重複度 2 を持つことがわかる.
- (b) 同様に頑張ると, $f(ct, dt) = t^3(c^4t + 2cd^2Ld^3)$ となって, 全ての傾きについて重複度 3 以上となることがわかる.

Exercise 4-10

曲線 $C: y^2 = x^2(1+x)$ は原点を特異点を持つことは既に見た. しかし, 原点を通り C に「接する」直線は二つあるように見える. 多重度を用いてこれらを見付け出すことは出来ないか?

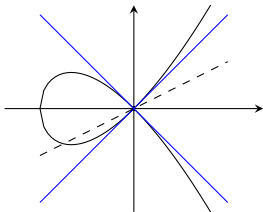
- (a) 原点を通る直線は, 二つの例外を除いて重複度 2 で C と交わることを示せ. 重複度 3 で交わる直線はどんな物か?
- (b) (a) の結果を, C のグラフを使って説明せよ. 何故「接線」は高い重複度を持つか?

演習問題 XI

- (a) $f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$ とおく. このとき
 $g(t) = f(ct, dt) = t^2(c^3t + (c^2 - d^2))$ である. $c = 0$ ならば
重複度 2 で交わることがわかる. $c \neq 0$ とする. このとき,
 $c^2 = d^2$ ならば定数項が消えるので重複度 3 で交わり, そう
でなければ重複度 2 で交わることになる. $c^2 = d^2$ となるの
は, 傾きが ± 1 になるときであるので, 結局この二つを除い
て重複度 2 で交わることがわかった.

演習問題 XII

(b) グラフは次のようになる。



ここで、原点の十分近傍で考えれば、 C は二つの曲線に分けることが出来る。そのそれぞれについて、もし原点で「接する」なら重複度 2，そうでないなら 1 を持つ。それぞれを合計すれば、どちらにも接さない場合は重複度 2，一方に接する場合は 3 を取る事がわかる。勿論、両方に接することはできないので、これで取り尽される。

演習問題 XIII

Exercise 4-11

四葉バラ曲線は、極座標を用いて $r = \sin(2\theta)$ で定義される。デカルト座標系では $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ と表される。

- (a) 原点を通る直線のは大半は多重度 4 でバラと交わることを示せ。幾何的にはどういうことか？
- (b) 4 より大きな多重度で交わる直線を見付け、その数字の幾何的な意味を説明せよ。

今までと同様に計算すれば、

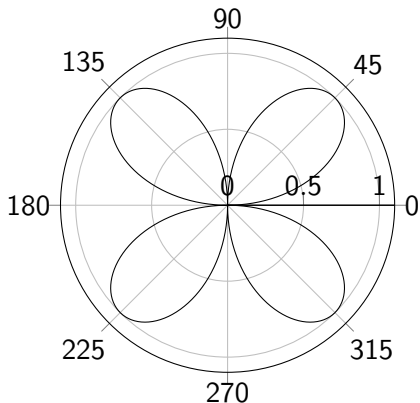
$$g(t) = t^4((c^6 + d^6)t^2 + 3(c^4d + cd^4)t - c^2d^2)$$

を分析すればよい。 $cd \neq 0$ の時、直線はちょうど重複度 4 で交わることがわかる。 $c = 0$ のときは $d \neq 0$ に注意すれば $g(t) = d^6t^6$ となり重複度 6 である。これは y -軸に相当する。また、 $d = 0$ の時も同様に重複度 6 で、これは x -軸に相当する。

演習問題 XIV

よって以上より，大半の直線は原点において重複度 4 で曲線と交わることがわかった．これは，大半の原点を通る直線は曲線と接さないということである．

ここで，四葉バラ曲線は次のような曲線である．



演習問題 XV

x 軸, y 軸はそれぞれ, 二つの曲線と接するとみることが出来る. その分の寄与が $2 \times 2 = 4$ で, 残りの二つとは接さないのので, 合計重複度が 6 となるのである.

Exercise 4-12 (曲面の特異点)

$f \in k[x, y, z]$ により定義される曲面 $V(f) \subseteq k^3$ について考える.

- (a) $(a, b, c) \in V(f)$ が特異点であることの定義を与えよ.
- (b) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の特異点を全て決定せよ. ちゃんと意味のある答えは出るか?
- (c) 曲面 $V = V(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ の特異点を全て決定せよ. テキストのグラフと関連づけてみよ.

- (a) $(a, b, c) \in V(f)$ が特異点であるとは,
 $\nabla f(a, b, c) = (f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)) = (0, 0, 0)$ となることである.

演習問題 XVI

- (b) 円周の場合と同様、 $\nabla f(x, y, z) = 0$ となるのは $x = y = z = 0$ となるときだけだが、これは球面上の点ではないので、特異点を持たない。この結果は、幾何的な直観と一致する。つまり、どの点に対しても一意に接平面が決定されるだろうという予想を裏切らない。
- (c) $\nabla f(x, y, z) = (2x, -2yz^2, -2y^2z + 3z^2)$ である。この零点を求めよう。 $I = \langle x, yz^2, 3z^2 - 2y^2z \rangle$ とおいて Gröbner 基底を求めれば、

$$G = \{ z^3, yz^2, 3z^2 - 2y^2z, x \}$$

となる。よって x, y を消去できたので、 $z = x = 0$ かつ y は任意というのが $\nabla f = 0$ の解であることがわかる。この条件を満たす点は、一つ残らず V 上の点であるので、 y -軸上の点は全て V の特異点となる。これは、教科書のグラフを見ると、二つの「曲面」が y -軸上で交わっているように見えることとも一致する。

演習問題 XVII

