代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 10 月 09 日

終結式

- 前節の結果を多変数関数に適用し，拡張定理の証明に使う.
- 次の結果は今までの結果の応用：

Prop. 1

$f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ が x_1 について次数正であるとする.

(i) $\mathrm{Res}(f, g, x_1) \in \langle f, g \rangle \cap k[y]$

(ii) $\mathrm{Res}(f, g, x_1) = 0 \Leftrightarrow f, g$ が $k[x_1, \ldots, x_n]$ において x_1 について次数正の共通因子をを持つ

Proof.

(i) については既に示した．(ii) については，$k(x_2, \ldots, x_n)[x_1]$ で共通因子を持つことと $k[x_1, \ldots, x_n]$ で共通因子を持つことが同値であることを使えば前節の結果より直ちに従う. ∎

先程の定理から，特に代数閉体の場合として次を得る：

Cor. 2

$f, g \in k[x]$ が正の次数を持つのとき，
$\mathrm{Res}(f, g, x) = 0 \Leftrightarrow f, g$ は $\bar{k}$ で共通根を持つ.

終結式への代入 I

- 拡張定理は既に示したが，更に終結式を使って証明する．
- 終結式で変数を消去したものは，消去イデアルの元にはなる．
- 部分解との関係はどうなるのか？
  - $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ の終結式 $h = \mathrm{Res}(f, g, x_1)$
  - $\mathbf{c} = (c_2, \ldots, c_n) \in k^n$ について，$h(\mathbf{c})$ と $\mathrm{Res}(f(x_1, \mathbf{c}), g(x_1, \mathbf{c}), x_1)$ の関係は？
  - 必ずしも一致するとは限らない！

$\longrightarrow$ 特定の状況では分かり易い状況になる！

終結式への代入 II

Prop. 3

$f, g \in k[x_1, \ldots, x_n], \deg_{x_1}(f) = \ell, \deg_{x_1}(g) = m$
とする．$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in k^{n-1}$ が,

(i) $\deg f(x, \mathbf{c}) = \ell$

(ii) $\deg g(x, \mathbf{c}) = p \leq m$

を満たすなら，$h = \mathrm{Res}(f, g, x_1)$ は
$h(\mathbf{c}) = a_0(\mathbf{c})^{m-p}\mathrm{Res}(f(x_1, \mathbf{c}), g(x_1, \mathbf{c}), x_1)$ を満たす.

証明の概略.

f は代入により次数が下がらないので，余因子展開を何度繰り返しても $a_0(\mathbf{c})$ のある一行目はゼロにならない．よって，$(m-p)$ 回一行目で余因子展開を繰り返せば，所望の結果を得る. ∎

終結式への代入 III

Example. (代入前後で異なる例（演習問題 8）)

(a) $f = x^2y + 3xy - 1, g = 6x^2 + y^2 - 4$ とする．
$h(y) = \mathrm{Res}(f, g, x) = y^6 - 8y^4 + 12y^3 + 70y^2 - 48y - 180.$
$y = 0$ を代入すると $f(x, 0) = 3x - 1, g(x, 0) = 6x^2 - 4$ で，
f は次数が 1 下がり，g は下がらない．ここで
$\mathrm{Res}(f(x, 0), g(x, 0), x) = -30$ だが，$h(0) = -180$ である．
命題の通り，次数の落ちていない g の先頭項係数の落ちた次数乗になっている．

(b) 上の例で $f = x^2y + 3xy - 1$ とする．今度は f の次数は代入により 2 落ちる．$h(0) = 36, \mathrm{Res}(f(x, 0), g(x, 0), x) = 1$ で，今度は 36 倍になっている．

終結式への代入 IV

Example. (両方次数が落ちる場合（演習問題 9）)

$f = x^2y + x - 1, g = x^2y + x + y^2$ とする．このとき，
$f(x, 0) = x - 1, g(x, 0) = x$ なので，共通因子を持たないから
$\mathrm{Res}(f(x, 0), g(x, 0), x) \neq 0$ である（実際には $= 1$ となる）．しかし，$h(y) = \mathrm{Res}(f, g, x) = y^6 + 2y^4 + y^2$ であり，$h(y) = 1$ となるから，これはどうやっても Res とは一致しない．この事は，どちらも代入により先頭項が消え，Res の一行目が全て 0 になってしまうからである．

拡張定理の証明 I

Th. 4 (拡張定理)

$$k = \bar{k},\, I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq k[X, \mathbf{Y}], \quad I_1 = I \cap k[\mathbf{Y}]$$

$f_i = g_i(\mathbf{Y})X^{N_i} + (X$ に関する次数 $< N_i$の項) ($N_i \geq 0, g_i \in k[\mathbf{Y}]$)
この時，$(c_2, \dots, c_n) \in V(I_1)$ を部分解として，
$(c_2, \dots, c_n) \notin V(g_1, \dots, g_n)$ とすると，

$$\exists c_1 \in k\,[(c_1, c_2, \dots, c_n) \in V(I)]$$

証明．$c = (c_2, \dots, c_n)$ とおき，環準同型

$$\begin{array}{rccc} \bar{\ } : & k[X, \mathbf{Y}] & \longrightarrow & k[X] \\ & \Psi & & \Psi \\ & f(X, \mathbf{Y}) & \longmapsto & f(X, \mathbf{c}) \end{array}$$

拡張定理の証明 II

を考える．これによる I の像は $k[X]$ のイデアル $\bar{I}$ となる．$k[X]$ は PID なので，特に $\bar{I}$ はある元 $u(X)$ で生成される：

$$\bar{I} = \{\, f(X, \mathbf{c}) \mid f \in I \,\} = \langle u(X) \rangle$$

もし $u \notin k$ ならば，$k = \bar{k}$ より $u(c_1) = 0$ となるような $c_1 \in k$ が取れる．すると，$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in V(I)$ となり，これが完全解である．また，零の時も同様である．
そこで，k が非零の定数にはなり得ないことを示す．
$\mathbf{c} \notin V(g_1, \ldots, g_n)$ より，ある g_i があって $g_i(\mathbf{c}) \neq 0$ である．$\bar{I}$ の定義から，$f(X.\mathbf{c}) = u_0 \in k$ となるような $f \in I$ が取れるので，それを一つ固定する．そこで，

$$h = \mathrm{Res}(f_i, f, X) \in k[\mathbf{Y}]$$

を考えよう．すると，命題 3 より

$$h(\mathbf{c}) = g_i(\mathbf{c})^{\deg(f)} \mathrm{Res}(f_i(X, \mathbf{c}), u_0, X)$$

拡張定理の証明 III

となる．前節の演習問題より，$\mathrm{Res}(f_i(X,\mathbf{c}),u_0,X)=u_0^{N_i}$ なので，

$$h(\mathbf{c})=g_i(\mathbf{c})^{\deg(f)}u_0^{N_i}\neq 0$$

しかし，$f_i,f\in I$ および命題 1 より

$$h\in\langle f,f_i\rangle\cap k[\mathbf{Y}]$$

でなくてはならず，$h(\mathbf{c})=0$ となり矛盾．よって $\bar{I}$ の生成元は非零定数ではない． $\blacksquare$

- ここで，$u(x)$ の取り方は非構成的だが，一度定理の成立が示されれば，$u(x)$ として $\mathrm{GCD}(f_1,\ldots,f_s)$ を取れることがわかる！