代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 12 月 4 日

FGLM アルゴリズム（再掲） I

- 一般の単項式順序に関する零次元イデアルの Gröbner 基底 G から，lex に関する Gröbner 基底 G_{lex} を計算するアルゴリズム

前処理 $G_{lex} = B_{lex} = \emptyset, \mathbf{X}^\alpha = 1$

Main Loop

1. 入力 $\mathbf{X}^\alpha$ に対し $\overline{\mathbf{X}^\alpha}^G$ を計算する．
2. $\overline{\mathbf{X}^\alpha}^G$ が B_{lex} の各元の剰余と一次従属か？

Case(a) 一次従属の時：

$$\overline{\mathbf{X}^\alpha}^G + \sum_j c_j \overline{\mathbf{X}^{\alpha(j)}}^G = 0$$

となる線形結合を見付けだし，

$$g = \mathbf{X}^\alpha + \sum_j c_j \mathbf{X}^{\alpha(j)} \in I$$

を G_{lex} の末尾に付け加える．単項式は増加順に見ているので，$\mathrm{LT}(g) = \mathbf{X}^\alpha, \mathrm{LC}(g) = 1$.

Case(b) 一次独立の時：$\mathbf{X}^\alpha$ を B_{lex} に付け加える．

FGLM アルゴリズム（再掲） II

Termination Check Main Loop で g が G_{lex} に追加されており，$\mathrm{LM}(g)$ が最大の変数の冪なら G_{lex}, B_{lex} を出力し終了する．

Next Monomial lex 順序に関して $\mathbf{X}^\alpha$ よりも大きく，どんな $g_i \in G_{lex}$ に対しても $\mathrm{LT}(g_i)$ で割れないような最小の単項式を取り，それを次の入力として Main Loop を実行する．

- 停止性と妥当性については前回議論した．

Next Monomial の選び方に関する補足 I

Exercise 2-3 (Next Monomial の選び方について)

$G_{lex} = \{ g_1, \ldots, g_k \}$ $(\mathrm{LT}(g_1) < \cdots < \mathrm{LT}(g_k)), X^\alpha = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ とする．特に，*Next Monomial* は終了判定に失敗した際にのみ発生するので，$\mathrm{LT}(g_k)$ は x_1 の冪でないとする．
各 $\mathrm{LT}(g_i)$ が $x_1^{a_1} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k+1}$ を割らないような $1 \leq k \leq n$ を考える．特に，$k = 1$ はこの条件を満たすので，条件を満たす最大の k が存在する．$\mathbf{X}^\beta$ がその最大の k に対応する単項式のとき，$\mathbf{X}^\beta$ は $\mathbf{X}^\alpha$ より大きく $\mathrm{LT}(g_i)$ のいずれでも割れない最小の単項式であることを示せ．

このような $\mathbf{X}^\beta$ が条件を満たしていることは明らか．そこで，各 $1 \leq k \leq n$ に対応する β を $\beta(k)$ と書くことにする．$k < \ell$ なら，

$$\mathbf{X}^{\beta(k)} = x_1^{a_1} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k+1}$$
$$\mathbf{X}^{\beta(\ell)} = x_1^{a_1} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k} \ldots x_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} x_\ell^{a_\ell+1}$$

Next Monomial の選び方に関する補足 II

今 lex 順序で考えていたので，明らかに $\mathbf{X}^{\beta(k)} > \mathbf{X}^{\beta(\ell)}$．よって，$\mathbf{X}^{\beta(k)}$ の形をした物の中では，k が最大値を取るものが lex についての最小の多項式となる．

後は $\mathbf{X}^{\beta(k)}$ の形の単項式が，題意を満たす単項式の中で下に共終であることを示せば証明が終わる．$\mathbf{X}^{\alpha} < \mathbf{X}^{\gamma}, \gamma = (c_1, \dots, c_n)$ とおく．すると，$a_1 = c_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1} = c_{N-1}, a_N < c_N$ となる．このとき，lex の定義より $\mathbf{X}^{\beta(N)} \leq \mathbf{X}^{\gamma}$ となる．$X^{\beta(N)}$ を割るような $\mathrm{LT}(g_i) = (b_1, \dots, b_n)$ があったとすると，
$b_1 \leq a_1 = c_1, \dots, b_{N-1} \leq a_{N-1} = c_{N-1}, b_N \leq a_N < c_N$ かつ
$b_{N+1} = 0 < c_{N+1}, \dots, b_n = 0 < c_n$ となり，X^{γ} も $\mathrm{LT}(g_i)$ で割り切れる．よって，もし X^{γ} がどんな $\mathrm{LT}(g_i)$ でも割れないなら，$X^{\beta(k)} \leq X^{\gamma}$ となるような k が存在し，それは上の N と一致する． ∎

関連事項

- FGLM アルゴリズムは零次元イデアルに関するアルゴリズム
- しかし，Gröbner 基底の元の次数の上界が与えられていれば，正次元のイデアルにも適用出来る．
- これと関連した，斉次イデアルに対する「Hilbert 函数駆動」アルゴリズムもある

? 次数の上界がわからない一般のイデアルを変換出来ないか？

$\rightsquigarrow$ Gröbner Walk（第八章）

FGLM アルゴリズムの一般化 I

- FGLM アルゴリズムは異なる文脈にも応用出来る
- FGLM アルゴリズムで元の Gröbner 基底 G を使うのは f に対し標準形 $\overline{f}^G$ を求めるときのみ
- そこで今までの議論を線型写像を用いて言い換えてみる
- B : G に関する $A = k[\mathbf{X}]/I$ の基底, $L(f) = \overline{f}^G$, $V = \mathrm{span}(B)$ とおく．これにより，写像

$$L : k[\mathbf{X}] \to V$$

が得られ，これは $\ker L = I$ となるような線型写像である．これを用いれば，Main Loop は次のように言い換えられる：

FGLM アルゴリズムの一般化 II

Main Loop・改

1. 入力：単項式 $\mathbf{X}^\alpha$
2. $L(\mathbf{X}^\alpha)$ を計算する．
3. $L(\mathbf{X}^\alpha)$ が B_{lex} の L による像と一次従属か？

Case(a) 一次従属の時：

$$L(\mathbf{X}^\alpha) + \sum_j c_j L(\mathbf{X}^{\alpha(j)}) = 0$$

となる線形結合を見付けだす．すると，
$I = \ker L$ より

$$g = \mathbf{X}^\alpha + \sum_j c_j \mathbf{X}^{\alpha(j)} \in I$$

である．この g を G_{lex} の末尾に付け加える．

Case(b) 一次独立の時：$\mathbf{X}^\alpha$ を B_{lex} に付け加える．

FGLM アルゴリズムの一般化 III

- ⋆ この手続を Termination Check，Next Monomial と組合せれば，今までと同じことが出来る
- 更に，L を像が有限次元となるような任意の線型写像とすれば，L の核の G_{lex} が求まる！
- 応用例 1：有限個の点のイデアルの lex 基底．$p_1, \ldots, p_m \in k^n$ を取り，次の写像を考える：

$$\begin{array}{rccc} L: & k[\mathbf{X}] & \longrightarrow & k^m \\ & \cup & & \cup \\ & f & \longmapsto & (f(p_1), \ldots, f(p_m)) \end{array}$$

すると，これは線型写像であり，$\ker L = I(p_1, \ldots, p_m)$ となる．よって一般化 FGLM アルゴリズムを用いる事で，$I(p_1, \ldots, p_m)$ の lex 基底が求められる．

FGLM アルゴリズムの一般化 IV

- 応用例 2：多項式の微分条件．$I =$ $\{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) - f_{xx}(0,0) = 0 \}$ を考える．これは演習 11 よりイデアルとなる．I は線型写像

$$\begin{array}{rcl} L:\ \mathbb{C}[x,y] & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & (f(O), f_x(O), (f_y - f_{xx})(O)) \end{array}$$

の核である．一般化 FGLM によって，$x > y$ なる lex に関する I の Gröbner 基底は $\{ y^2, xy, x^2 + 2y \}$ であることがわかる．
  - ⋆ このような微分条件と準素分解により，任意の零次元イデアルを説明出来ることが知られている．