# 代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 12 月 11 日

## 2.4 固有値・固有ベクトルによる方程式の解法

- 章の主題「$\mathbb{C}$ 上の代数方程式 $f_1 = \cdots = f_s = 0$ の求解」

$\rightsquigarrow$ いいかえれば「$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ 、代数的集合 $V(I)$ に含まれる点を求めよ」

$\star$ $f_1 = \cdots = f_s = 0$ の解が有限個なら、$V(I)$ は有限集合となり、有限性定理より $I$ は零次元イデアルで $A = \mathbb{C}[\mathbf{X}]/I$ は有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間

- 以下、 $V(I)$ が有限個の解を持つとし、$A$ の構造を使って、任意の多項式 $f$ の $V(I)$ 上での値を計算する
  - 特に $f = x_i$ の時を考えると、解の座標が判る
  - $f$ の $V(I)$ 上での値は、実はある線型写像の固有値となる
  - 対応する固有ベクトルが解についての有用な情報を持つ

# 剰余環の元の行列表現 I

$f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ に対し、その掛け算による写像が定まる：

$$\begin{array}{cccc} m_f : & A & \longrightarrow & A \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [g] & \longmapsto & [f][g] \end{array}$$

この写像は次の性質を持つことが簡単にわかる：

**Prop. 1**

$f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ について次が成立：

- (a) $m_f : A \to A$ は線型写像である
- (b) $m_f = m_g \Leftrightarrow f - g \in I$。特に $m_f = 0 \Leftrightarrow f \in I$

# 剰余環の元の行列表現 II

⋆ $A$ は有限次元なので、$m_f$ は（有限正方）行列表現を持つ

- 特に、基底単項式 $B$ に関する表現行列を考えるのが都合がよい。
- 乗算表を求めれば簡単に表現行列が得られる

⇝ 以下、この行列自身も $m_f$ と書くことにする

- 上の帰結として $m_f = m_{\overline{f}^G}$ となる

## Exercise 4-1 (例)

以前考察した
$G = G = \{ x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y, xy^2 - x, y^3 - y \}$ で生成されるイデアル $I$ を考える。この時、$A = \mathbb{C}[x,y]/I$ のベクトル空間としての基底は $B = \{ 1, x, y, xy, y^2 \}$ で与えられるのだった。このとき、$m_x, m_1, m_y, m_{xy-y^2}$ を求めよ。$m_{y^2}$ と $(m_y)^2$ はどう関連するか？その理由は？

# 剰余環の元の行列表現 III

乗算表を基に計算すれば、

$$m_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad m_1 = (\text{単位行列})$$

また、

$$m_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad m_{y^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 剰余環の元の行列表現 IV

ここで $(m_y)^2$ を計算すると、$m_{y^2} = (m_y)^2$ となる。更に、

$$m_{xy-y^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & -5/2 & 1 \\ -1 & 3/2 & 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

であり、検算すると $m_{xy-y^2} = m_x m_y - (m_y)^2$ となっている。より一般に、次が成立する。

**Prop. 2**

$f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ とすると、

ⓐ $m_{f+g} = m_f + m_g$

ⓑ $m_{f \cdot g} = m_f \cdot m_g$

# 剰余環の元の行列表現 V

⋆ 上の定理より、

$$\begin{array}{rccc} m_{(-)}: & \mathbb{C}[\mathbf{X}] & \longrightarrow & M_d(\mathbb{C}) \\ & \cup\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\cup \\ & f & \longmapsto & m_f \end{array}$$

は環準同型となる。

- 準同型定理から、単射準同型 $A \rightarrowtail M_d(\mathbb{C})$ が誘導される。
- $M_d(\mathbb{C})$ は非可換だが $A$ は可換なので、これは全射ではない

**Cor. 3**

$h(t) \in \mathbb{C}[t], f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ とすると、

$$m_{h(f)} = h(m_f)$$

# 固有値と多項式の値 I

- $\dim A \in \infty$ より、$f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ について $\{1, [f], [f]^2, \dots\}$ は一次従属。

$\leadsto$ 非自明な線型結合

$$\sum_{i=0}^{m} c_i [f]^i = 0 \quad (c_i \in \mathbb{C}, (c_0, \dots, c_m) \neq 0)$$

が存在する。

$\leadsto$ 剰余環の定義より、これは

$$\sum_{i=0}^{m} c_i f^i \in I \tag{0.1}$$

と同値

$\leadsto$ $\sum_{i=0}^{m} c_i f^i$ は $V(I)$ 上の任意の点で消える！

# 固有値と多項式の値 II

- 目標：零次元イデアル $I$ について、$V(I)$ の点を求めたい
  - $h(t) \in \mathbb{C}[t], f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ とすると、今までの議論から

$$h(m_f) = 0 \Leftrightarrow m_{h(f)} = 0 \Leftrightarrow [f] = 0$$

  ⋆ $h(m_f) = 0$ となるような $h$ の全体は $\mathbb{C}[t]$ のイデアルを成す。

**Exercise 4-2**

$M \in M_d(k), I_M = \{ h(t) \in k[t] \mid h(M) = 0 \}$ とおくと、$I_M$ は $k[t]$ のイデアルとなる。

**Proof.**

簡単。 ∎

# 固有値と多項式の値 III

- ⋆ $I_M$ の非零でモニックな生成元を、$M$ の最小多項式と呼ぶ。
- ⇝ $k[t]$ は PID なので、$h(M) = 0$ なら $h_M | h$
  - ⋆ 特に Cayley-Hamilton より $h_M$ は $M$ の固有多項式を割り切る
  - ⇝ 特に $k = \mathbb{C}$ の時、$h_M$ の根と $M$ の固有値は一致する！（線型代数の一般論）
- 以下、$m_f$ の最小多項式を $h_f$ と書く。この時、以下の三つの数集合が考えられる：
  - 方程式 $h_f(t) = 0$ の解
  - 行列 $m_f$ の固有値
  - $V(I)$ 上の各点での $f$ の値
- ⋆ 実は、これらはみな一致する！

# 主定理とその証明 I

**Th. 5**

$I \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{X}]$, $\quad A = \mathbb{C}[\mathbf{X}]$, $\quad f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$, $\quad h_f : m_f$ の $A$ での最小多項式とする。$\lambda \in \mathbb{C}$ について以下は同値：

- (a) $\lambda$ は方程式 $h_f(t) = 0$ の解
- (b) $\lambda$ は行列 $m_f$ の固有値
- (c) $\lambda$ は $f$ の $V(I)$ のある点での値

証明。$(a) \Leftrightarrow (b)$ は線型代数の一般論より OK。
$(b) \Rightarrow (c)$。$\lambda$ が $m_f$ の固有値であるとすると、それに対応する固有ベクトル $[z] \neq 0$ があって $[f-\lambda][z] = 0$ となる。そこで、$f$ の値が $V(I)$ のどの点でも $\lambda$ と一致しないと仮定して矛盾を導く。
すなわち、$V(I) = \{\, p_1, \ldots, p_m \,\}$ かつ $f(p_i) \neq \lambda$ とする。
そこで、$g = f - \lambda$ とおけば、$g(p_i) \neq 0$ となる。ここで、二節の結果から、$g_i(p_j) = \delta_{ij}$ となるような多項式 $g_i$ が取れる。ここで、多項式 $g' = \sum_{i=1}^{m} g_i / g(p_i)$ を考える。すると、各 $i$ について、

## 主定理とその証明 II

$g(p_i)g'(p_i) = 1$ となるので、零点定理から
$1 - gg' \in I(V(I)) = \sqrt{I}$ となる。したがって、ある $\ell > 0$ があって $(1 - gg')^\ell \in I$ となる。二項定理により展開し、$g$ を因子に含む項を纏めれば、$1 - g\tilde{g} \in I$ となる。すると、$A$ では関係式 $[g][\tilde{g}] = 1$ が成立するので、$[\tilde{g}]$ は $g$ の乗法逆元である。
ところで、上の議論から $[g][z] = 0$ であった。これに両辺から $[\tilde{g}]$ を掛ければ、$[z] = 0$ となるが、これは $[z]$ が固有ベクトルであることに反する。よって $\lambda$ は $f$ の $V(I)$ のある点での値と一致する。
(c) $\Rightarrow$ (a) $\lambda = f(p)$ なる $p \in V(I)$ が存在したとする。
$h_f(m_f) = 0$ より、系から $h_f([f]) = 0$ となる。(0.1) より $h_f(f) \in I$ が従うので、$h_f(f)$ は $V(I)$ の任意の点で消える。よって
$h_f(\lambda) = h_f(f(p)) = h_f(f)(p) = 0$。 $\blacksquare$

# 実際例 I

## Exercise 4-3

引き続き演習問題 1 の例を考える。

(a) *Maple* などを使って $m_x$ の最小多項式が $h_f(t) = t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t$ となることを示せ。よって、この根は $t = 0, \pm 1, 2$ となる。

(b) 第一節で開発した手法を用いてこの方程式を解き、$h_x$ の根が $f(x, y) = x$ の $V(I)$ 上での相異なる値と一致することを示せ。同じ $x$-座標を共有する点が二つあるので、$h_x$ の根は五つではなく四つしかないことがわかる。

(c) 同様のことを $m_y$ に対しても行え。

# 実際例 II

```
> LIB "linalg.lib";
> ring Q = 0,(x,y),lp;
> matrix m[5][5] = 0, 0, 0, 0, 0,...;
> poly f = charpoly(m, "x");
> f/gcd(f, diff(f, x));
x4-2x3-x2+2x
> minipoly(m);
[1]:
   _[1]=-1
   _[2]=0
   _[3]=1
   _[4]=2
[2]:
   1,1,1,1
```

# 実際例 III

以上で $(a)$ は済。$(b)$。lex についての Gröbner 基底を計算すると、

$$I = \langle y^3 - y, xy^2 - x, 2x^2 + 3xy - 3x + y^2 - 3y \rangle$$

よって、$I \cap \mathbb{C}[y] = \langle y^3 - y \rangle$ であり、$y = 0, \pm 1$。これらに対応する $x$ の値を求めれば、

$$V(I) = \{ (0,0), (1,1), (-1,1), (2,-1), (1,-1) \}$$

となる。よって、$f(x,y) = x$ の $V(I)$ 上での値は、$\{ 0, 1, -1, 2 \}$ であり、上の一致することがわかる。
$(c)$ について。同様にやれば、$h_y = y^3 - y$ となる。この根は $y = 0, \pm 1$ であり、上での答から $y = 0$ 以外は同一 $y$-座標を共有する点が二つずつあるので、$h_y$ の根は三つとなる。

# 主定理・射影版

- ⋆ $f = x_i$ に対し主定理を適用することで、上の演習と同様の結果が一般的に得られる。

**Cor. 6**

$I \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ が零次元イデアルだとする。$x_i$ に対応する乗算行列 $m_{x_i}$ の固有値と $V(I)$ の点の $x_i$-座標の全体は一致する。更に、最小多項式 $h_{x_i}(t)$ の $t$ を $x_i$ で置き換えたものが、消去イデアル $I \cap \mathbb{C}[x_i]$ の一意なモニック生成元となる。

- 次回：これを応用した連立代数方程式の解法を定式化する
- 各 $x_i$ の計算に他の $x_j$ の解を用いる必要がなくなる