代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2014 年 1 月 22 日

変数の冪による部分空間を使った求解 I

Exercise 4-9

$V_i = \mathrm{span}\,\{\,[x_i]^j \mid 0 \le j\,\} \subseteq A$ とし，$B_i = \{\,[1], \ldots, [x_i^{m_i - 1}]\,\}$ が V_i の基底であるとする．

1. 乗算行列 m_{x_i} のこの基底に関する制限 $m_{x_i} \restriction V_i$ の上の基底に関する表現行列は何か？ $I \cap k[x_i]$ の生成元を求める際と同様に求められることを示せ．
2. $m_{x_i}|V_i$ の固有多項式およびその根は何か？

1. 上のように連続した冪の形で基底 B_i が取れることも示さなくてはならないが，これは証明の結果として明らかになる．$[x_i] \cdot [x_i^d] = a_{0d} + a_{1d}[x_i] + \cdots + a_{m_i-1,d}[x_i^{m_i-1}]$ とおく．すると m_{x_i} の基底 B_i に関する表現行列は，$\tilde{m}_{x_i} = (a_{j,k})_{0 \le j,k < m_i}$ となる．今 $[1], \ldots, [x_n^{m_i-1}]$ は一次独立なので，

$$[x_i] \cdot [x_i^d] = 1 \cdot [x_i^{d+1}] \quad (0 \le d < m_i - 1)$$

変数の冪による部分空間を使った求解 II

よって，$a_{jd} = \delta_{j,d+1} \quad (0 \le d < m_i - 1)$ である．また，
$I \cap k[x_i]$ の生成元を求めるアルゴリズムの性質より，

$$h_i(x_i) = x_i^{m_i} - (c_{m_i-1} x_i^{m_i-1} + \cdots + c_1 x_i + c_0)$$

があって $I \cap k[x_i] = \langle h_i(x_i) \rangle$ となる．特に $h_i([x_i]) = 0$ より
$[x_i]^{m_i} = c_{m_i-1}[x_i]^{m_i-1} + \cdots + c_1[x_i] + c_0$ である．以上より，

$$a_{jk} = \begin{cases} \delta_{j,k+1} & (0 \le k < m_i - 1) \\ c_j & (k = m_i - 1) \end{cases}$$

■

変数の冪による部分空間を使った求解 III

❷ 上の行列を具体的に書き下してみると，以下のようになる：

$$
\begin{bmatrix}
0 & & & c_0 \\
1 & & & c_2 \\
& \ddots & & \vdots \\
& & 1 & c_{m_i-1}
\end{bmatrix}
$$

これは多項式 $h_i(x_i) = x_i^{m_i} - \sum_{j=0}^{m_i-1} c_j x_i^j$ の同伴行列である．よって $\tilde{m}_{x_i}$ の最小多項式は $h_i(m_i)$ となる．$\tilde{m}_{x_i}$ の固有多項式を χ_i とおけば，Cayley-Hamilton の定理から $h_i \mid \chi_i$ であり，その根は一致する．特に，$\deg \chi_i = \deg h_i = m_i$ なので，結局 $\tilde{m}_{x_i}$ の固有多項式は単元倍の差を除いて $I \cap k[x_i]$ の生成元と一致する．この時，前回までの議論から χ_i の根は $V(I)$ の点の第 i 座標の値と一致する．
この議論を逆に辿れば，$[x_i]$ の生成する部分 k-代数の基底として連続する冪を取ってこれることが判る． $\blacksquare$

変数の冪による部分空間を使った求解 IV

Exercise 4-10

上の演習問題の結果と系 4.6 を演習 4 の方程式に適用せよ．

m_{x_i} の固有値は $V(I)$ の第 i 座標の値全体と一致し，その最小多項式は $I \cap k[x_i]$ のモニックな生成元 $q(x_i)$ と一致するのであった．上の結果から $q(x)$ は $m_{x_i}|V_i$ の固有多項式でもある．よって，一般により複雑で高次な行列である m_{x_i} の固有値を求める代わりに，$q(x)$ の同伴行列の固有値を求める事が出来るだろう．この結果については，次の問題の後で比較検討する．

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 I

Exercise 4-16 (Shape lemma)

$I=\sqrt{I}$ をゼロ次元イデアルとし，$V(I)$ の第 n 座標がみな相異なるとする．x_n が最後に来るような *lex* 順序に関する被約 *Gröbner* 基底を G とする．

1. $|V(I)|=m$ の時，剰余類 $1,[x_n],\dots,[x_n^{m-1}]$ が互いに一次独立となり，従って A の基底となることを示せ．
2. ある $h_i\in k[x_n], \deg h_i<m\,(1\le i\le n)$ があって，G は $g_1=x_1-h_1(x_n),\dots,g_{n-1}=x_{n-1}-h_{n-1}(x_n),g_n=x_n^m-h_n(x_n)$ から成ることを示せ．
3. 第 n 座標が与えられたとき，$V(I)$ の全ての点を求める方法を与えよ．

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 II

1. $V(I) = \{ p_1, \dots, p_m \}$ とし，p_i の第 n 座標を $p_i^{(n)}$ と書くことにする．仮定より $p_i^{(n)}$ は相異なる．
$c_0 + c_1[x_n] + \cdots + c_{m-1}[x_n^{m-1}] = 0$ としよう．このとき

$$c_0 + c_1 x_n + \cdots + c_{m-1} x_n^{m-1} \in I \cap k[x_n]$$

である．$p_i \in V(I)$ より $g(p_i) = g(p_i^{(n)}) = 0 \quad (1 \le i \le m)$ である．よって，g は少なくとも m 個の異なる零点を持つ．ここで $g \neq 0$ とすると，g は高々 $m-1$ 次なので m 個の因子を持つことに反する．よって $g = 0$ であり，$c_i = 0$．よって $1, \dots, [x_n^{m-1}]$ は一次独立である．特に，$\dim A = m$ より A の基底となる． ∎

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 III

2. 前項より A の基底として $[1], \ldots, [x_n^{m-1}]$ が取れるので,

$$[x_i] = a_{0i} + a_{1i}[x_n] + \cdots + a_{m-1,i}[x_n^{m-1}] \quad (1 \le i < n)$$
$$[x_n^m] = a_{0n} + a_{1n}[x_n] + \cdots + a_{m-1,n}[x_n^{m-1}]$$

を満たす a_{ij} が一意に存在する．そこで,
$h_i(x_n) = a_{0i} + a_{1i}x_n + \cdots + a_{m-1,i}x_n^{m-1}$ とおけば，これが題意を満たすことを示す．特に被約 Gröbner 基底の一意性より，$G' = \{ g_1, \ldots, g_n \}$ が lex に関する I の被約 Gröbner 基底であることを示せば十分である．

1. G' が $\langle G' \rangle$ の Gröbner 基底であること．今，$i < j$ なら $\mathrm{LT}(g_i)$ と $\mathrm{LT}(g_j)$ は互いに素である．よって各 $S(g_i, g_j)$ は G' を法としてゼロに簡約されることがわかる．よって G' は $\langle G' \rangle$ の Gröbner 基底である．

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 IV

2. $G' = I$. $G \subseteq I'$ は上での定め方より明らかなので，逆向きの包含関係を示す．$f \in I$ を取る．これを $g_1, \ldots, g_n$ により割り算する：

$$f = p_1 g_1 + \cdots + p_n g_n + r$$

この時，割り算アルゴリズムの性質から $r = f - \sum p_i g_i$ は $g_1, \ldots, g_n$ のいずれの先頭項でも割れない．特に $\mathrm{LT}(g_i) = x_i \ (i < n)$ より，r は $x_1, \ldots, x_{n-1}$ を含まないので，$r \in I \cap k[x_n]$ となる．今，系 6 および演習問題 2.2 より，g_n は $I \cap k[x_n]$ のモニックな生成元であるから，$g_n \mid r$ となる．割り算アルゴリズムの性質から $r = 0$ または $\deg r < \deg f$ となるが，$\deg r < \deg f$ とすると g_n が $I \cap k[x_n]$ の生成元であることに反する．よって $r = 0$ である．以上より $\overline{f}^{G'} = 0$ となるので，$f \in \langle G' \rangle$ となる．

以上より，G' が I の lex に関する Gröbner 基底であることが判った．特に，各 g_i の形から G' は明らかに被約である．よって示された．

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 V

3. x_n での相異なる値が与えられているとする．FGLM アルゴリズムなどにより I の lex に関する被約 Gröbner 基底 G を求めれば，上の議論からこの元は $x_1, \ldots, x_{n-1}$ を x_n で表したものになっている．よって G の各元に x_n の値を代入すれば，各点での値が求まる．

比較 I

	平均誤差	最大誤差	最小誤差	速度
m_{x_i} の固有値	$8.4525e{-15}$	$3.9088e{-14}$	$6.6613e{-16}$	$21.62(ms)$
左固有ベクトル	$7.1401e{-14}$	$6.7264e{-13}$	$6.3541e{-15}$	$296.00(ms)$
同伴行列の固有値	$3.1256e{-12}$	$2.2570e{-11}$	$4.0309e{-15}$	$105.36(ms)$
変数の冪基底（+第 n 座標判定）	$1.4177e{-6}$	$1.3166e{-5}$	$3.9459e{-10}$	$208.04(ms)$

- 誤差（元のイデアルに代入した値）に関して
  - m_{x_i} の固有値を直に計算する方法と左固有ベクトル法は大体近い（左固有ベクトルは乱択なので少しずつ変動がある）
  - 同伴行列はそれほど良くはないが，一応使い物にはなりそう

比較 II

- 速度に関して（別紙ベンチマーク参照）
  - 乗算回数が一番多い筈の固有値法が一番速い
  - 左固有ベクトル法と同伴行列法は三倍ほど差がある
    - いずれも消去イデアルの生成元を計算している．プロファイルを取った所，$I \cap k[x_i]$ の生成元を求める所で時間を喰っている．
    - 現時点では $[1], \ldots, [x_i^n]$ が一次従属になるまで繰り返し LU 分解を行って方程式を解こうとしている
    - 前の時点での計算結果を捨てているので効率が悪い
    - LU 分解は n^3 オーダーなので，累積で n^4 オーダーくらいになってしまう
    - 線型方程式の解き方を工夫しないと，折角固有値計算の回数を減らしても効率がかなり悪くなる．
- その他
  - 左固有ベクトル法を実装する上で気付いたこと
    - いきなり係数の大きな多項式を生成すると誤差が大きく蓄積する

    $\rightsquigarrow$ 最初は絶対値が 5 以下くらいから初めて，失敗する度に段々係数を大きくする