集合論ゼミ 2012年10月30日

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科三年

2012年 10月 30日

前回までの復習

導入された公理：

外延性公理	$\forall z(z \in A \leftrightarrow z \in B) \leftrightarrow A = B$
和集合公理	$\forall z \exists y \forall x((\exists u \in z) x \in u \leftrightarrow x \in y)$
冪集合公理	$\forall z \exists y \forall x(x \subseteq z \leftrightarrow x \in y)$
置換公理	$\forall u \forall v \forall w(\psi(u,v) \wedge \psi(u,w) \to v = w) \to$ $\forall z \exists y \forall v((\exists u \in z)\psi(u,v) \leftrightarrow v \in y)$ （集合の，写像による像は集合）[1]

これらから，空集合や非順序対，シングルトンなどの存在が云えた．

[1]現代では，少々違う形の公理を使うこともある．次の分出公理と組合せると，ψ が函数を定めている必要はなく，単に u に対し少なくとも一つの v があることが判ればよい．この形の物を reflection と云うらしい．

部分集合公理

Th. 5.13 (部分集合)

y は $\phi(x)$ に自由出現しないとして，

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \land \phi(x))$$

が成立.
$\{ x \in z \mid \phi(x) \}$ は集合，ということ.

Proof.

置換公理において，$\psi(u, v)$ を $\phi(u) \land u = v$ に取ればよい. ∎

部分集合公理は，置換公理の代わりに用いられることがよくある.
分出公理とも呼ばれる.[2]

[2] 分出公理だけだと，例えば $\omega + \omega$ を考えてやるとモデルになってしまうので弱い．そこで置換公理を入れる.

部分集合公理と公理

Exercise 5.14

部分集合公理 (5.13) と

$$\exists y \forall x (\phi(x) \to x \in y)$$

から，内包公理のインスタンス

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

が従うことを示せ.

片側の包含関係だけから，特定の条件に対するクラスが得られる，ということ.

証明

Proof.

定理 5.13 において $y' \leftarrow y, y \leftarrow z$ として

$$\exists y' \forall x (x \in y' \leftrightarrow x \in y \land \phi(x))$$

今，仮定より $\phi(x) \to x \in y$ であるから，特に

$$\phi(x) \land x \in y \leftrightarrow \phi(x)$$

これを最初の式に代入すれば,

$$\exists y' \forall x (x \in y' \leftrightarrow \phi(x))$$

よって示された. ∎

弱い形の公理

片側の包含関係さえ示せば集合の存在が示せることが判った．そこで，今までの公理群に対して以下の弱い形を考える：

弱い和集合公理 $\forall z \exists y \forall x ((\exists u \in z) x \in u \to x \in y)$

弱い冪集合公理 $\forall z \exists y \forall x (x \subseteq z \to x \in y)$

弱い置換公理 $\forall u \forall v \forall w (\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \to v = w) \to$
$\forall z \exists y \forall v ((\exists u \in z) \psi(u, v) \to v \in y)$

これらと部分集合公理を組み合わせることで元の公理が得られる．ある構造が集合論のモデルとなることを示すのに，片方の包含関係だけを示せばよくなるので便利．

演習問題

Exercise 5.15

集合論の公理を使わずに，以下の二つは同値.

1. 部分集合公理スキーマ (5.13)
2. スキーマ $\forall z\,[\forall x(\phi(x) \to x \in z) \to \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))]$

初回講義でやったし，意味も明瞭であるので証略.

和，共通部分，差，宇宙，補クラス

Def. 5.16

1. $A \cup B := \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$
2. $A \cap B := \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$
3. $A \sim B := \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}$
4. $V := \{\, x \mid x = x \,\}$ 普遍クラス，宇宙クラス
5. $\sim A := V \sim A$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{で} A_1 \cup \ldots \cup A_n \text{を},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{で} A_1 \cap \ldots \cap A_n \text{を},$$

それぞれ表すとする．

クラス形式の部分集合公理

Axiom 5.17 (クラス形式の部分集合公理)

$\forall z(z \cap A)$ は集合

Th. 5.18

(5.17) の形の命題を置換公理抜きの拡張言語に付け加えると，基本言語で (5.13) と同じ定理スキーマが得られる．

Proof.

A に適当な基本インスタンスを代入して，同値変形と Conservation Theorem を適用することで簡単に示せる．[3] ∎

[3] BG 集合論 = ZF 集合論 + パラメタによって定義可能なクラス となっていると思えばよい．

部分集合，差集合，和集合などの性質

クラス形式の部分集合公理は，実はクラス形式の置換公理から従う．ここでは，一時的に 5.17 を公理として採用する．

Prop. 5.19

1. A が集合かつ $B \subseteq A$ ならば B も集合．
2. A が集合なら $A \cap B$ および $A \sim B$ も集合．
3. A, B が集合なら $A \cup B (= \cup \{ A, B \})$ も集合．
4. V は真のクラス．
5. $\sim x$ は真のクラス．
6. $A \neq 0$ ならば $\cap A$ は集合．

Prop. 5.19 の証明 I

$(i), (ii)$ の証明：
まず (ii) を示す． A が集合より $\exists z(z = A)$．すると，部分集合公理 5.17 より $z \cap B$ は集合．等号公理より $A \cap B$ も集合となる．
また，定義より
$A \sim B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} = A \cap \{ x \mid x \notin B \}$ と見做せるので，(ii) からこれも集合．
また， $B \subseteq A$ とすると，定義から $x \in B \to x \in A$ である．
よって，

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

となるので，$A \cap B = B$ である．今，A が集合より (ii) の結果から $B = A \cap B$ も集合．

Prop. 5.19 の証明 II

(iii)：A, B が集合とすると，$x = A, y = B$ となるような集合 x, y が存在する．非順序対の存在定理 5.11 から，$\{x, y\}$ は集合．よって，和集合公理から $\cup\{x, y\} = x \cup y$ も集合．よって等号公理から $A \cup B$ も集合．

(iv)：V が集合だったとし，$B = \{x \mid x \in x\}$ と置く．(ii) より $V \sim B$ は集合．しかし，
$V \sim B = \{x \mid x \in V \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \notin x\}$ となり，これは 4.9(ii) より真のクラスであるので矛盾．よって V は真のクラス．（発表後の補足：これは，部分集合公理を使ったほうが簡単に示せる．V を集合とすると部分集合公理より $\{x \in V \mid x \in x\}$ も集合となり矛盾，とすれば一発.）

(v)：$\sim x = V \sim x$ が集合であると仮定する．今，$x, \sim x$ が共に集合であることから，(iii) より $x \cup \sim x = V$ は集合となる．これは (iv) の結果に矛盾．

Prop. 5.19 の証明 III

(vi)：$A \neq 0$ とすると，$x \in A$ とできる．定義から $x \cap (\cap A) = \cap A$ である．(ii) から $x \cap (\cap A)$ は集合であるので，従って $\cap A$ は集合.

置換公理のクラス項による言い換え

Exercise 5.20

次の命題 5.7 が置換公理と同値である事を示せ：
$\tau(u, x_1, \ldots, x_n)$ を項とすると，$\{\, \tau(u, x_1, \ldots, x_n) \mid u \in z \,\}$ は集合.

証明の概略.

逆は示しているので，5.7 から置換公理を出せばいい．各 u に対し $\psi(u, v)$ なる v が高々一つ存在すると仮定する．このような v が一つも存在しない場合，置換公理が存在を主張する集合 y は空集合に取ればよい．存在する場合，その一つを v_0 として，函数 F を以下で定める．

$$F(u) = \begin{cases} v & (\exists! v \psi(u, v)) \\ v_0 & (otherwise) \end{cases}$$

すると，各 u に対し $F(u)$ は明らかに項であり，命題が存在を保証する $\{\, F(u) \mid u \in z \,\}$ が置換公理の y である． ∎

無限公理

Axiom 5.21 (無限公理, Zermelo 1908)

$$\exists z(0 \in z \land (\forall x \in z)(\forall y \in z)(x \cup \{ y \} \in z))$$

「無限」という性質を書き下すことが出来る．なのでもっと抽象的に「無限集合が存在する」と云う公理を置くこともできる．しかし，後で「無限」であることがわかるような，具体的な集合一つの存在を仮定したほうが色々と便利.

z の感覚

$$
\begin{array}{ll}
0: & 0 \\
1: & \{0\} \\
2: & \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\} \\
3: & \{\{\{0\}\}\}, \{0, \{\{0\}\}\}, \{\{0\}, \{\{0\}\}\}, \{\{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}, \\
 & \{\{0, \{0\}\}\}, \{0, \{0, \{0\}\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}
\end{array}
$$

段階 n に応じてどんどん元が増えつづける

基礎の公理

以下の基礎の公理については，後程詳しく議論する．[4]

Axiom 5.22 (基礎の公理; Skolem 1923, von Neumann 1925)

$\phi(x)$: y を自由変数に持たないとする．

$$\exists x \phi(x) \to \exists x(\phi(x) \wedge (\forall y \in x)\neg\phi(y))$$

クラス形式は次になる．

Axiom 5.23 (クラス形式の基礎の公理)

$$A \neq 0 \to (\exists x \in A)(x \cap A = 0)$$

これの基本インスタンスが基礎の公理のインスタンスと一致するのは明らか．

[4] 基礎の公理は，逆向きの帰納法みたいなもので,「満たさないものの最小が存在」と読める．後々整礎帰納法として強力な力を発揮する．

Zermelo-Fraenkel 集合論

Def. 5.24 (ZF)

以下の公理からなる体系を Zermelo-Fraenkel 集合論といい，ZF と書く．

- 外延性公理 $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$
- 和集合公理 $\cup z$ は集合
- 冪集合公理 $\mathfrak{P}(z)$ は集合
- 置換公理 $\forall u \forall v \forall w (\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \to v = w) \to \forall z \exists y \forall v (v \in y \leftrightarrow \exists u (u \in z \wedge \psi(u, v)))$
- 基礎の公理 $\exists x \phi(x) \to \exists x (\phi(x) \wedge (\forall y \in x) \neg \phi(y))$

ZF に後程出て来る選択公理を追加した体系を ZFC と呼ぶ．

以下，暫く選択公理を用いないで出来るところまでやる（使った場合は番号の隣に Ac と書く）．正則性公理はあまり使わないが，使っている場面は非常に分かり易い．

関係と函数

集合と ϵ だけで，関係や函数といった重要な概念を表現していく．

Def. 6.0 (対函数)

x, y を引数に取る函数 $\langle x, y\rangle$ が対函数

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \to x = z \wedge y = w \tag{1}$$

このとき，$\langle x, y\rangle$ を x, y の順序対と呼ぶ．

Def. 6.1 (Wiener 1914, Kuratowski 1925)

順序対は次のようにして具体的に構成出来る．

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$z \text{ が順序対である} \Leftrightarrow \exists x \exists y (z = \langle x, y\rangle)$$

これが最初の定義を満たすことは有名なので証略．

射影・デカルト積 I

Def. 6.4 (射影)

z を順序対とすると，$z = \langle x, y \rangle$ となるような x, y は一意に定まる．そこで，

$$1^{\mathrm{st}}(z) = x$$
$$2^{\mathrm{nd}}(z) = y$$

によって $1^{\mathrm{st}}, 2^{\mathrm{nd}}$ を定める．このとき，z を順序対とすると，

$$1^{\mathrm{st}}(\langle x, y \rangle) = x \qquad 2^{\mathrm{nd}}(\langle x, y \rangle) = y$$
$$z = \langle 1^{\mathrm{st}}(z), 2^{\mathrm{nd}}(z) \rangle$$

が成立する．

射影・デカルト積 II

Def. 6.5 (デカルト積)

次の $A \times B$ を，A, B のデカルト積と呼ぶ.

$$A \times B := \{ \langle u, v \rangle \mid u \in A, v \in B \}$$

Prop. 6.6

$\langle x, y \rangle$ を条件 (1) が成立するような任意の対函数とする．このとき，この対函数による二つの集合のデカルト積は再び集合となる.

Prop. 6.6 の証明

Proof.

s, t を集合とし，$x \in s$ を固定する．このとき $\{ \langle x, y \rangle \mid y \in t \}$ は命題 5.7 から集合．すると再び 5.7 より

$$\{ \{ \langle x, y \rangle \mid y \in t \} \mid x \in s \}$$

は集合となる．これに和集合公理を適用して，

$$\cup \{ \{ \langle x, y \rangle \mid y \in t \} \mid x \in s \} = s \times t$$

は集合であることがわかる． ∎

順序対に関する演習問題 I

Exercise 6.7

1. （*Wiener 1914*）$\langle x, y\rangle' = \{\{\{x\}, 0\}, \{\{y\}\}\}$ とすると，これが対函数となっていることを示せ．
2. (1) から類推して順序三つ組 の概念を定義し，それを満たすような函数を定義せよ．

(1) の証明：$\langle x, y\rangle' = \langle u, v\rangle'$ とする．即ち

$$\{\{\{x\}, 0\}, \{\{y\}\}\} = \{\{\{u\}, 0\}, \{\{v\}\}\}$$

である．このとき，

$$\{\{y\}\} \in \langle x, y\rangle' = \langle u, v\rangle' = \{\{\{u\}, 0\}, \{\{v\}\}\}$$

より，次のいずれかが成立．

順序対に関する演習問題 II

1. $\{\{y\}\} = \{\{u\}, 0\}$
2. $\{\{y\}\} = \{\{v\}\}$

(i) だとすると，特に $0 \in \{\{u\}, 0\} = \{\{y\}\}$ より $0 = \{y\}$ となり矛盾．よって (ii) が成立．$\therefore y = v$
同様に,

1. $\{\{x\}, 0\} = \{\{u\}, 0\}$
2. $\{\{x\}, 0\} = \{\{v\}\}$

のいずれかが成立する．(i) の時，補題 (6.3) より $x = u$ となる．(ii) だとすると，上の (i) と同様にして $0 = \{v\}$ となるので矛盾．
よって，$x = u$ かつ $y = v$.

順序対に関する演習問題 III

(ii) の答：
$\langle x, y, z\rangle$ が順序三つ組であるとは，$\langle x, y, z\rangle = \langle u, v, w\rangle$ ならば $x = u, y = v, z = w$ が成立すること．
今，対函数 $\langle x, y\rangle$ が与えられているとする．$\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$ とおけば，これは題意を満たす順序三つ組である．
これらを使わない場合，

$$\langle x, y, z\rangle' = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

などとすれば，これも条件を満たす．証明は面倒なので省略[5]．

[5]先生に教えて頂いた他の方法：$\langle x, y, z\rangle = \{\langle 0, x\rangle, \langle 1, y\rangle, \langle 2, z\rangle\}$ などとすればいい

関係とその例

Def. 6.8

クラス S が（二項）関係 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S の各元 x が順序対である．
$\langle y, z\rangle \in S$ のとき $y\,S\,z$ と書く．

Example.

- $<$ を自然数の自然な順序とすると，これは関係．
- クラス $S \times T$ は常に関係である．
- 空集合 0 も関係である．

Def. 6.9

S を任意のクラスとする.

1. S の定義域 $\mathrm{Dom}(S)$ を次のクラスとして定義する.

$$\{\, x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in S)\,\} = \left\{\, 1^{\mathrm{st}}(z) \;\middle|\; z \in S, z \text{ は順序対} \,\right\}$$

2. S の値域 $\mathrm{Rng}(S)$ を次のクラスとして定義する.

$$\{\, y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in S)\,\} = \left\{\, 2^{\mathrm{nd}}(z) \;\middle|\; z \in S, z \text{ は順序対} \,\right\}$$

3. $\mathrm{Dom}(S) \cup \mathrm{Rng}(S)$ を S のフィールドと呼ぶ.
4. S の逆関係 S^{-1} を次で定める.

$$S^{-1} := \{\, \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in S \,\}$$

Prop. 6.10

1. 集合の定義域・値域は集合である（対函数の性質だけから出て来る）.
2. S が真のクラスかつ関係なら，$\mathrm{Dom}(S), \mathrm{Rng}(S)$ の少なくとも一方は真のクラス．[6]

[6]最初資料を創った段階では「関係」が抜けていた．順序対を一つも含まないようなクラスを取ってくれば，その定義域も値域も共に空集合となる．

(1) の証明

Proof of (1).

s を集合とする．$\psi(u, v) = \exists x(u = \langle v, x\rangle)$ とおけば，対函数の性質から ψ は置換公理の前提を満たす．よって，ある集合 y が存在して

$$y = \{ v \mid \exists u \exists x(u \in s \land u = \langle v, x\rangle) \}$$

を満たす．同値変形により，

$$y = \{ v \mid \exists x(\langle v, x\rangle \in s) \} = \mathrm{Dom}(s)$$

となる．よって $\mathrm{Dom}(s)$ は集合．$\mathrm{Rng}(s)$ が集合であることも，同様に示せる． ∎

(2) の証明

Proof of (2).

$\mathrm{Dom}(S), \mathrm{Rng}(S)$ が共に集合であると仮定する．S が関係であることから，

$$
\begin{aligned}
S &\subseteq \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathrm{Dom}(S), y \in \mathrm{Rng}(S) \} \\
&= \mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Rng}(S)
\end{aligned}
$$

が成立する（このことは 6.11(1) で示す）．ここで，命題 6.6 より $\mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Rng}(S)$ は集合．よって，命題 5.19(1) より S も集合となる．これは仮定に矛盾． ∎

Rem.

上の証明で S が関係でないと，$S \subseteq \mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Rng}(S)$ が成立せず，証明が破綻する．実際，順序対を含まないような真のクラスの定義域・値域は，共に空集合 0 となる．

Exercise 6.11

1. $S \subseteq \mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Rng}(S) \Leftrightarrow S$ が関係
2. $A \times B = C \times D$ から $A = C \wedge B = D$ を導く必要十分条件を求めよ.
3. $(S^{-1})^{-1} = S \Leftrightarrow S$ が関係
4. $\mathrm{Dom}(S^{-1}) = \mathrm{Rng}(S), \mathrm{Rng}(S^{-1}) = \mathrm{Dom}(S)$

(1) の証明.

$(\Rightarrow)$ 関係とは順序対のみからなるクラスのことであり，デカルト積は二つの集合の順序対からなる集合であるので自明.
$(\Leftarrow)$ を示す．S を関係とすると，S の元は $\langle x, y\rangle \in S$ と云う形に書ける．すると，定義域・値域の定義から $x \in \mathrm{Dom}(S)$ かつ $y \in \mathrm{Rng}(S)$．よって，

$$\langle x, y\rangle \in \mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Rng}(S)$$
$$\therefore S \subseteq \mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Rng}(S)$$

∎

(2) の証明.

$A \times B \neq 0, C \times D \neq 0$ ならばよい．実際，$\langle a_0, b_0 \rangle \in A \times B$ とすれば，任意の $a \in A$ に対して $\langle a, b_0 \rangle \in A \times B = C \times D$ より $a \in C$．同様にして $c \in C \to c \in A$ より $A = C$．B, D についても同様. ∎

(3) の証明：(⇒) について.

$(S^{-1})^{-1} = S$ とする．任意の $z \in S$ に対して $\exists x \exists y (z = \langle x, y \rangle)$ を示せばよい．しかるに,

$$\begin{aligned} z \in S = (S^{-1})^{-1} &\Leftrightarrow z \in \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in S^{-1} \} \\ &\Leftrightarrow z \in \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in S \} \\ &\Leftrightarrow \exists x \exists y (z = \langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

よって示された. ∎

(3) の証明：($\Leftarrow$) について.

S を関係とする． $x \in S \Leftrightarrow x \in (S^{-1})^{-1}$ を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
& z \in (S^{-1})^{-1} \\
& \Leftrightarrow z \in \{\, \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in S^{-1} \,\} \\
& \Leftrightarrow z \in \{\, \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \{\, \langle v, u \rangle \mid \langle u, v \rangle \in S \,\}\,\} \\
& \Leftrightarrow z \in \{\, \langle y, x \rangle \mid \langle y, x \rangle \in S \,\} \\
& \Leftrightarrow z \in \{\, u \mid u \in S \wedge u \text{ は順序対} \,\} \\
& \Leftrightarrow z \in S \qquad\qquad (\because R : \text{関係})
\end{aligned}
$$

■

(4) の証明.

$\mathrm{Dom}(S^{-1}) = \mathrm{Rng}(S)$ のみ示せば後は同様に示せる.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(S^{-1}) & \Leftrightarrow \exists y(\langle x, y \rangle \in S^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(\langle y, x \rangle \in S) \\
& \Leftrightarrow x \in \mathrm{Rng}(S)
\end{aligned}
$$

■

Def. 6.12

1. 関係 F が函数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in \mathrm{Dom}(F))\exists! y(\langle x, y\rangle \in F)$
2. クラス F の x における値または像 $F(x)$ を次で定義する．

$$F(x) = \begin{cases} y & \exists! y(\langle x, y\rangle \in F) \\ 0 & \text{otherwise}^{7} \end{cases}$$

   $\langle x, y\rangle \in F$ なる y が存在しないとき，F は x において未定義であると呼ばれる．そもそも F が順序対を元に持たない時，単に F は未定義であると云う．
3. 函数 F が A から B への写像であるとは，$\mathrm{Dom}(F) = A$ かつ $\mathrm{Rng}(B) \subseteq B$ となること．この時，$F : A \to B$ と書く．
4. A からの写像 F が B 上への全射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Rng}(F) = G$

[7] 未定義でも，値を決めておいた方が理論的に整合性があってよい．

Def. 6.12

5. 函数 F が 1 対 1 $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall y \in \mathrm{Rng}(F))\exists! x(F(x) = y)$
6. A から B への写像 F が 1 対 1 であるとき，F は単射 であると云う．加えて単射 F が B 上への全射であるとき，F は全単射であると云われる．
7. 2 変数函数は，順序対からなる定義域を持つ函数として表現する．つまり，$F(x, y) = F(\langle x, y\rangle)$ とする．3 変数以上についても同様とする．

Exercise 6.13

函数 F が 1 対 1 $\Leftrightarrow F^{-1}$ が函数

Proof.

$$\begin{aligned}
F\text{ が 1 対 1} &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{Rng}(F))(\exists! x \langle x, y\rangle \in F) \\
&\Leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{Dom}(F^{-1}))(\exists! x \langle x, y\rangle \in F) \qquad (\because 6.11(4)) \\
&\Leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{Dom}(F^{-1}))(\exists! x \langle y, x\rangle \in F^{-1}) \\
&\Leftrightarrow F^{-1}\text{が函数}
\end{aligned}$$

∎

函数に関する外延性の原理

二つの函数が互いに等しい，と云うことは外延的に「全ての x に対して同じ値を取る」と云う事と同値.

Prop. 6.14

F, G : 函数
$\mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(G)$ かつ $\forall x \in \mathrm{Dom}(F)(F(x) = G(x))$
$\Rightarrow F = G$

証明は明らかなので証略.

函数の明示的な定義

函数を，関係としてではなく普段するように定義する方法を準備する．

Def. 6.15

1. $\tau(x)$: 項, A : クラス とする．
「函数 F を $\mathrm{Dom}(F) = A$ かつ各 $x \in A$ に対して $F(x) = \tau(x)$ として定義する」 $\Leftrightarrow F = \{\, \langle x, \tau(x) \rangle \mid x \in A \,\}$
この時，この函数を $\langle \tau(x) \,|\, x \in A \rangle$ で表す（補足：一種の直積だと思えるので，この記号を使うのには整合性がある）．
このような表記法を函数抽象と云う．
2. （場合分けによる定義）
A : クラス, $\tau_i(x)$: 項 $(i = 1 \ldots n)$, $\Phi(x)$: 論理式 $(i = 1 \ldots n)$
「$\mathrm{Dom}(F) = A$ かつ $F(x) = \tau(x)$ if $\Phi(x)$ により定義される函数 F」とは，関係

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{\, \langle x, \tau_i(x) \rangle \mid x \in A \wedge \Phi_i(x) \,\}$$

のことである．各 x について唯一つの $\Phi_i(x)$ だけが成立することを仮定するか示すかすれば，F は実際に A を定義域とする函数となる．

補足

実際上は，よく

F を

$$
\begin{aligned}
&Dom(F) = A, \\
&\quad F(x) = \tau_i(x) \qquad (\text{if } \Phi_i(x)) \qquad (i = 1 \ldots n-1) \\
&\quad F(x) = \tau_n(x) \qquad (\text{otherwise})
\end{aligned}
$$

により定義する

と云うような書き方をしたりする．ここでの otherwise と云うのは，

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \neg \Phi_i(x)$$

のことである．

Def. 6.16

1. $R|_A := \{\, \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \, R \, y \,\}$
   「関係 R の A への制限」
2. $F \restriction A := \{\, \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge F(x) = y \,\}$
   「函数 F の A への制限」
3. $R[A] := \{\, y \mid (\exists x \in A)(\langle x, y \rangle \in R) \,\}$
   特に，$R = F$ が函数のとき，

$$F[A] := \{\, F(x) \mid x \in \mathrm{Dom}(F) \cap A \,\}$$

   「A の F による像」

言葉が被っているが，記号や対象が函数・関係かによって使い分けるので大丈夫.

Def. 6.17

1. $R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y (x\,R\,y \wedge y\,S) \}$
   注意：普通の函数・関係の合成積と順番が逆！
2. $FG = G \circ F$ （函数合成）
   $(FG)(x) = F(G(x))$ となる普通の函数合成.
3. 函数 F, G が両立する
   $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G)(F(x) = G(x))$
   （即ち $F \upharpoonright \mathrm{Dom}(G) = G \upharpoonright \mathrm{Dom}(F)$）
   特に，$\mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G) = 0$ なら明らかに両立する.

合成に関する法則

Prop. 6.18

1. $\mathrm{Dom}(R \circ S) = \mathrm{Dom}(R \cap (V \times \mathrm{Dom}(S))) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$
2. $\mathrm{Rng}(R \circ S) = \mathrm{Rng}(S \restriction \mathrm{Rng}(R)) \subseteq \mathrm{Rng}(S)$
3. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$．よって $(FG)^{-1} = G^{-1}F^{-1}$
4. F, G が函数（*or* 単射）$\Rightarrow$ FG も函数（*or* 単射）
5. F, G : 函数 $\Rightarrow (FG)(x) = F(G(x))$
（片方が定義されればもう一方も定義され一致する）
6. $I = \{ \langle x, x \rangle \mid x = x \} = \langle x \mid x \in V \rangle$ 恒等関係とする．各関係 R に対し，
$$R^{-1} \circ R \subseteq I \Leftrightarrow R : \text{函数}$$
7. 演算 $\circ$ や函数の合成は結合的.

定理の証明

(1) $\sim$ (4) および (7) は明らか．よって (6) のみ示す.

($\Rightarrow$) の証明.

$R^{-1} \circ R \subseteq I$ とする．$x\,R\,y \wedge x\,R\,y' \rightarrow y = y'$ を示す.
$x\,R\,y' \leftrightarrow y'\,R^{-1}\,x$ より $y'\,R^{-1}\,x \wedge x\,R\,y$

$$\therefore \langle y', y \rangle \in R^{-1} \circ R \subseteq I$$
$$\therefore y' = y$$

∎

$(\Leftarrow)$ の証明.

R を函数とする．$\langle x, x' \rangle \in R^{-1} \circ R \to x = x'$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}\langle x, x' \rangle \in R^{-1} \circ R &\Leftrightarrow \exists y (x \, R^{-1} \, y \wedge y \, R \, x') \\ &\Leftrightarrow \exists y (y \, R \, x \wedge y \, R \, x')\end{aligned}$$

よって，R が函数であることから，$x = x'$．よって示された. ∎

関係・函数に関する注意

「関係」には異なる三つの概念がある.

1. 集合としての関係……集合論の対象
2. クラスとしての関係……集合論の対象ではない！
    - 関係を定義する式を扱うことは出る.
    - 「任意の関係」に言及するには拡張言語のクラス変数を使う必要がある.
    - 結局，クラスへの所属関係に関わる対象にしか言及出来ないので，クラス変数を使うのも方便に過ぎない（？）
3. 構文上略記法としての関係……長い論理式を簡単に書きたいだけ.

「函数」についても同様の注意が成り立つ.

クラス形式の置換公理

「函数」をクラスによって表現する方法を構築したので，これを使って置換公理のクラス形式を得ることが出来る．

Axiom 6.19 (クラス形式の置換公理)

F が函数なら，任意の集合 z について $F[z]$ は集合．

これが実際に置換公理のインスタンスと同値になることは非常に簡単．しかし，函数の定義に順序対を使っており，順序対は非順序対によって作られていた．非順序対の存在は置換公理によって示されていたので，拡張言語でこの公理を機能させるには，対公理を追加する必要がある！

以上の議論を踏まえると，拡張言語での ZF の公理は以下のようになる．

Axiom 6.20 (拡張言語における ZF の公理)

対の公理	x, y は集合
和集合公理	$\cup z$ は集合
冪集合公理	$\mathfrak{P}(z)$ は集合
置換公理	F が函数のとき $F[z]$ は集合
無限公理	$\exists z(0 \in z \wedge (\forall x \in z)(\forall y \in z)(x \cup \{y\} \in z))$
基礎の公理	$A \neq 0 \to (\exists x \in A) x \cap A = 0$

置換公理スキーマ

基本言語の置換公理で，論理式を拡張言語に置き換えたものが拡張理論で成立.

Th. 6.21

$\Psi(u, v)$: w, z が自由出現せず，他にクラス変数をパラメータとして含んでもよい

$$\forall u \forall v \forall w(\Psi(u, v) \wedge \Psi(u, w) \to v = w)$$
$$\to \forall z \exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow (\exists u \in z)\Psi(u, v))$$

証明の概略.

クラス形式の置換公理において，$F = \{\, \langle (\rangle u, v) \mid \Psi(u, v) \,\}$ に取れば，$F[z]$ が求める y となる. $\blacksquare$

置換公理スキーマ

基本言語の置換公理で，論理式を拡張言語に置き換えたものが拡張理論で成立．

Th. 6.21

$\Psi(u,v)$: w, z が自由出現せず，他にクラス変数をパラメータとして含んでもよい

$$\forall u \forall v \forall w(\Psi(u,v) \wedge \Psi(u,w) \to v = w)$$
$$\to \forall z \exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow (\exists u \in z)\Psi(u,v))$$

証明の概略.

クラス形式の置換公理において，$F = \{ \langle()u,v) \mid \Psi(u,v) \}$ に取れば，$F[z]$ が求める y となる． ∎

このスキーマを用いれば，前回証明しなかった 5.6 でクラス変数を含む場合が簡単に証明出来る．

クラス形式の部分集合公理

Th. 6.23

$\forall z(z \cap A$ は集合$)$

Proof.

置換公理 6.19 で，$F = \langle x \mid x \in A \rangle$ に取ればよい． ∎

Exercise 6.24

F : 函数 $\Rightarrow F \upharpoonright z$ は集合
特に，$\mathrm{Dom}(F)$ が集合なら F は集合．

Cor.

函数抽象により集合上の函数を定義すると，これは集合となる．

6.24 の証明.

$$
\begin{aligned}
F \restriction z &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in z \land y = F(x) \} \\
&= \{ \langle x, F(x) \rangle \mid x \in z \} \\
&\subseteq z \times F[z]
\end{aligned}
$$

置換公理より $F[z]$ は集合．命題 6.6 から $z \times F[z]$ は集合．すると命題 5.19(i) より $F \restriction z$ も集合となる． ∎

Prop. 6.25

$\mathrm{Dom}(r)$ および $\mathrm{Rng}(r)$ は集合．

Def. 6.26

${}^{z}A = \{\, f \mid f : z \to A \,\}$

Prop. 6.27

A 集合なら ${}^{z}A$ も集合.

Proof.

$f \in {}^{z}A$ は関係なので,

$$\begin{aligned} f &\subseteq z \times A \\ f &\in \mathfrak{P}(z \times A) \\ \therefore {}^{z}A &\subseteq \mathfrak{P}(z \times A) \end{aligned}$$

A が集合なので, 命題 6.6 より $z \times A$ も集合. 従って冪集合公理より $\mathfrak{P}(z \times A)$ も集合.
よって, 命題 5.19 (1) より ${}^{z}A$ も集合となる. ∎

演習問題

Exercise 6.28

1. ${}^{z}A = 0$ となるための， z, A に関する必要十分条件を求めよ．
2. V 上の函数 F で， $\forall x(F(x) \notin x)$ となるような F を定めよ．基礎の公理を使わないようにしてみよ．

(1) の証明.

$z \neq 0$ かつ $A = 0$ であればよい． これが十分条件であることは明らか． 必要性を示す． ${}^{z}A = 0$ とする． $A \neq 0$ とすると， z の元を適当な $x \in A$ に写すような写像が存在するので， ${}^{z}A \neq 0$ となってしまう． よって $A = 0$． この時， $z = 0$ とすると $0 \in {}^{z}A$ となってしまうので， $z \neq 0$ でなくてはならない． ∎

(2) の答え[8].

基礎の公理があれば，$F(x) = x$ とおけばよい．そうでない場合は，与えられた集合のうち特に基礎の公理っぽい部分に注目して，Russel のパラドックスを用いる．
$F(x) = \{\, y \mid y \in x \wedge y \notin y \,\}$ とする．$\exists x(F(x) \in x)$ として矛盾を導く．このとき，$F(x) \in F(x)$ だとすると，$F(x)$ の定義より $F(x) \notin F(x)$ となり矛盾．$F(x) \notin F(x)$ としても $F(x) \in F(x)$ となり矛盾．よってこのような x は存在しない． ∎

[8]発表当時に失敗していたので，この節は完全なるリライトである．

Def. 6.29

クラス A と B が交わらない $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \cap B = 0$

Prop. 6.30

1. F, G を函数とすると,

$$F \cup G \text{ が函数} \Leftrightarrow F, G \text{ が両立する}$$

特に F, G が交わらない $\Rightarrow$ $F \cup G$ が函数

2. T を函数からなるクラスとすると,

$$\cup T \text{ が函数} \Leftrightarrow \text{任意の二つが両立する}$$

3. F, G : 両立する函数とすると,
   - $F \cup G$ が *1* 対 *1* $\Leftrightarrow$ F, G がそれぞれ *1* 対 *1* で,
     $\mathrm{Rng}(F) \cap \mathrm{Rng}(G) \subseteq F[\mathrm{Dom}(F) \cup \mathrm{Dom}(G)]$
   - 特に F, G が *1* 対 *1* かつ定義域が交わらないとすると,
     $F \cup G$ が *1* 対 *1* $\Leftrightarrow$ 値域が交わらない

(1) は自明.

(2)：($\Leftarrow$) の証明.

$\cup T$ が函数であるとする．$F, G \in T$ が両立しないとすると，これは函数にならないので矛盾．よって任意の二元が両立する． ∎

(2)：($\Rightarrow$) の証明.

$\cup T$ が函数にならなかったとする．すなわち，

$$\exists x \exists y \exists y' (y \neq y' \wedge \langle x, y \rangle \in \cup T \wedge \langle x, y' \rangle \in \cup T)$$

とする．すると定義より，

$$\exists f \exists g (x f y \wedge x g y')$$

となり，f, g が両立することに矛盾．よって $\cup T$ は函数． ∎

(3) の証明.

どちらを向きでも F, G が 1 対 1 でなければならないのは明らか.
$F \cup G$ を 1 対 1 とする．このとき $y \in \mathrm{Rng}(F) \cap \mathrm{Rng}(G)$ とすると，$F \cup G$ が 1 対 1 だから，$\exists! x_0 (F \cup G)(x_0) = y$ が云える．よって $F(x) = y$ かつ $G(x) = y$ となる．従って，
$y \in F[\mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G)]$ となるので示せた．逆も明らか.
二つめの条件も明らか. ∎