集合論ゼミ 2013 年 01 月 22 日

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科三年

2013 年 01 月 22 日

定義と幾つかの自明な命題

Def. 5.9

- 関係 R が B 上整礎関係である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $R|B$ が整列関係である.
- $\langle B, R\rangle$ が整礎構造 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle R, B\rangle$ は構造で， R は B 上整礎.

Prop. 5.10

$$R \text{ が } A \text{ 上整礎} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq y \subseteq A \text{ が } R\text{-極小元を持つ} \\ (\forall x \in A)\{\, x \in A \mid y \mathrel{R} x \,\} \text{ が集合} \end{cases}$$

Prop. 5.11

R が A 上整礎， $B \subseteq A \Rightarrow R$ は B 上整礎.

整礎関係に関する rank

整礎関係に対する rank を定義する．極小元に対しては rank 0，そこから順に辿って $1, 2, \ldots$ と続いていく感じ．

Def. 5.12 (整礎関係に関する rank; Zermelo 1935)

R : 整礎関係 とする．このとき，V 上の函数 ρ_R を次のように定める．

$$\rho_R(x) = \sup{}^{+} \{\, \rho_R(y) \mid y \mathrel{R} x \,\} \tag{1}$$

右辺の集合 $\{\, \rho_R(y) \mid y \mathrel{R} x \,\}$ は R の left-narrowness より集合となり，$\rho_R(x)$ が順序数となることは整礎帰納法により簡単に示せる．

整礎関係の性質 I

Prop. 5.13

R が整礎関係のとき，以下が成立する．

$$x \, R \, y \to \rho_R(x) < \rho_R(y) \tag{2}$$

Proof.

$x \, R \, y$ より $\rho_R(x) < \sup^+ \{ \rho_R(x) \mid x \, R \, y \} = \rho_R(y)$ ∎

Prop. 5.13

R が整礎関係のとき，以下が成立する．

$$x \mathrel{R} y \to \rho_R(x) < \rho_R(y) \tag{2}$$

Proof.

$x \mathrel{R} y$ より $\rho_R(x) < \sup^+ \{\, \rho_R(x) \mid x \mathrel{R} y \,\} = \rho_R(y)$ ∎

とあるが，明らかに (2) を満たす函数は一意ではない．物によっては，おそらく (1) を指しているものであると考える．

整礎関係の性質 II

Exercise 5.14

1. R : *well-founded* のとき $x\ R^*\ y \to \rho_R(x) < \rho_R(y)$
2. R : *left-narrow*, $H : V \to \mathrm{On}$ かつ H, R が (2) を満たす $\Rightarrow R$ は *well-founded*
3. R が整礎 $\Rightarrow R^*$ も整礎
4. R が整礎，$S \subseteq R \to \rho_S(x) \leq \rho_R(x)$
5. 関係 R は高々一つの *rank* 函数を持つ.
6. ρ_R が *rank* 函数，$A : R^{-1}$-*closed* $\Rightarrow \rho_R[A] = \mathrm{On}$ または $\rho_R[A] \in \mathrm{On}$

関係 R，函数 $H : V \to \mathrm{On}$ が ~~(2)~~ (1) を満たすとき，H を R の rank 函数 と云う．(v) より，これは $\{\, H(x) \mid x\ R\ y \,\}$ が集合で $H(x) = \sup^+ \{\, H(x) \mid x\ R\ y \,\}$ となるときと同値.

整礎関係の性質 III

(i) の証明.

$x\ R^*\ y$ とすると，x から y への R-鎖が存在する．そのそれぞれについて 5.13 を繰り返し適用し，推移律を用いれば良い． ∎

(ii) の証明.

$u \neq 0$ とする．$H[u] \subseteq \mathrm{On}$ は空ではないので，$<$ に関する最小元が存在する．そこで，$\alpha = \min H[u]$ として，

$$v = \{\, x \in u \mid H(x) = \alpha \,\}$$

とおくと，取り方から $v \neq 0$．実はこの元が u の R-極小元となっている．$x_0 \in v$ とし，$(\exists y \in u) y\ R\ x_0$ だったとする．すると，(2) より $H[u] \ni H(y) < H(x_0) = \alpha$ となり，α の $H[u]$ 上の最小性に矛盾する．よって R は整礎関係となる． ∎

整礎関係の性質 IV

(iii) の証明.

(ii) を用いる．そこで，H として ρ_R を取る．すると (i) より

$$x \; R^* \; y \to H(x) = \rho_R(x) < \rho_R(y) = H(y)$$

となる．よって，R^* も整礎関係であることがわかる． ∎

(iv) の証明.

x の R に関する整礎帰納法で示す．帰納法の仮定は，
$\forall y(y \, R \, x \to \rho_S(y) \leq \rho_R(y))$ である．よって，

$$\rho_S(x) = \sup_{y \in x}{}^{+} \rho_S(y) \leq \sup_{y \in x}{}^{+} \rho_R(y) = \rho_R(x)$$

∎

整礎関係の性質 V

(v) の証明.

(1) は 5.13 より (2) を満たす．よって，(ii) より R は整礎関係となる．よって，整礎帰納法より $\sup^{+}$ による定義が一意的に定まることが判る． $\blacksquare$

Proof.

誘導に従ってやってみようとしたが余り上手く行かなかったのと，今後便利なので，次の補題を介して証明することにする． $\blacksquare$

Lemma.

A : R^{-1}-*closed*, R : *well-founded*

$\Rightarrow \alpha \in \rho_R[A] \wedge \beta < \alpha \to \beta \in \rho_R[A]$

整礎関係の性質 VI

補題の証明.

α に関する順序数の帰納法で示す． $\alpha = 0$ のときは自明.

- $\alpha = \beta + 1$ のとき． $\rho_R(x) = \beta + 1, \gamma < \beta + 1$ とする． $\alpha + 1 = \sup^+ \{ \rho_R(y) \mid y \mathrel{R} x \}$ なので，命題 3.33 より β は右辺の集合の最大値となり， A は R^{-1}-closed であるから， $\beta \in \rho_R[A]$ である． $\gamma \leq \beta$ とする．上の議論より $\gamma = \beta$ のときは OK． $\gamma \in \beta$ とすると，帰納法の仮定より $\gamma \in \rho_R[A]$ となる．よって $\alpha = \beta + 1$ の時も OK.
- α が極限順序数のとき． $\alpha = \sup^+ \{ \rho_R(y) \mid y \mathrel{R} x \}$ が極限順序数であることから，右辺の集合には最大元が存在しない．よって，任意の $\beta < \alpha$ に対して， $\beta < \rho_R(y) < \alpha$ となるような $y \in A$ が存在することがわかる．よって， $\rho_R(y)$ に関して帰納法の仮定が使えて， $\beta \in \rho_R[A]$ となる．

∎

整礎関係の性質 VII

(*vi*) の証明.

上の命題を用いれば，あっと云う間に終わる．$\rho_R[A] \subseteq \mathrm{On}$ であり，補題より特にこれは On の始断面である．On の始断面は全体か特定の順序数のどちらかであるので，これで命題が示された． ∎

$\in^{-1}$-closed な集合を推移的集合と呼んだことに注意.

Def. 6.1 (推移閉包)

A の $\in^{-1}$-閉包を A の推移閉包と呼び, $\mathrm{Tc}(A)$ で表す.

$$\mathrm{Tc}(A) := A \cup (\in^{-1})^*[A]$$

Cor. 6.2

1. 任意のクラス A について, $\mathrm{Tc}(A)$ は A を含む最小の推移的クラス. 特に集合 x について $\mathrm{Tc}(x)$ は集合.
2. $B \subseteq \mathrm{Tc}(A) \to \mathrm{Tc}(B) \subseteq \mathrm{Tc}(A)$
3. $\mathrm{Tc}(A) = A \cup \bigcup_{x \in A} \mathrm{Tc}(x)$

Proof.

- (i) 定理 4.20 及び 4.33 より明らか（$\because \epsilon^{-1}$ は right-narrow）.
- (ii) $B \subseteq \mathrm{Tc}(A)$ より，A は B を含む推移的集合．よって $\mathrm{Tc}(B)$ の最小性から $\mathrm{Tc}(B) \subseteq \mathrm{Tc}(A)$.
- (iii) $x \in \mathrm{Tc}(A)$ とすると，$\mathrm{Tc}(A)$ が推移的であることから $x \subseteq \mathrm{Tc}(A)$ となるので，(*ii*) から $\mathrm{Tc}(x) \subseteq \mathrm{Tc}(A)$．よって $A \cup \bigcup_{x \in A} \mathrm{Tc}(x) \subseteq \mathrm{Tc}(A)$.
  逆向きの包含関係を示すには，(*i*) より $A \cup \bigcup_{x \in A} \mathrm{Tc}(x)$ が推移的であることが云えれば十分である．
  $z \in y \in A \cup \bigcup_{x \in A} \mathrm{Tc}(x)$ とする．$y \in A$ のとき．$z \in y$ より $z \in \mathrm{Tc}(y)$．$y \in \bigcup_{x \in A} \mathrm{Tc}(x)$ とすると，
  $(\exists x \in A) z \in y \in \mathrm{Tc}(x)$ となり，$\mathrm{Tc}(x)$ の推移性から
  $z \in \mathrm{Tc}(x) \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathrm{Tc}(x)$ となる．よって示された．

∎

整礎集合とその性質 I

Def. 6.3 (整礎集合)

$\mathrm{Wf} := \{\, x \mid \in$ が $\mathrm{Tc}(x)$ 上整礎 $\}$. Wf の元を**整礎集合**と云う.

Th. 6.4

Wf は, $\in$ がその上で整礎関係となる最大の推移的クラスである.

Wf が推移的であること.

$x \in y \in \mathrm{Wf}$ とする. $y \in \mathrm{Wf}$ より $\mathrm{Tc}(y)$ 上 $\in$ が整礎関係となる.
$x \in y \subseteq \mathrm{Tc}(y)$ より $x \subseteq \mathrm{Tc}(y)$ であり, 15(ii) より
$\mathrm{Tc}(x) \subseteq \mathrm{Tc}(y)$. 今, $\mathrm{Tc}(y)$ 上 $\in$ は整礎なので, 5.11 より $\mathrm{Tc}(y)$
上でも整礎. よって $y \in \mathrm{Wf}$. ∎

整礎集合とその性質 II

$\in$ が Wf 上整礎であること．

$0 \neq u \subseteq \mathrm{Wf}$ として，u が $\in$-極小元を持つことを見る．$x \in u$ をとり，$x \cap u = 0$ なら x が極小元となるので OK.
$x \cap u \neq 0$ とすると，x は整礎的集合なので $\in$ は $\mathrm{Tc}(x)$ 上整礎．よってその空でない部分集合 $\mathrm{Tc}(x) \cap u$ には $\in$-極小元 z が存在する．明らかに，これは u の $\in$-極小元でもある． ∎

Wf が最大であること．

C を $\in$ が整礎関係となる推移的クラスとする．$x \in C$ について $\in$ が $\mathrm{Tc}(x)$ 上の整礎関係となることを示せれば $C \subseteq \mathrm{Wf}$ が云える．
$x \in C$ とすると，C の推移性より $x \subseteq C$ であり，$C = \mathrm{Tc}(C)$ だから $\mathrm{Tc}(x) \subseteq C$ となる．今，$\in$ は C 上整礎関係なので，その部分集合 $\mathrm{Tc}(x)$ 上でも整礎関係となり，従って $x \in \mathrm{Wf}$ となる． ∎

Wf の性質 I

Prop. 6.5

1. $x \subseteq \mathrm{Wf} \to x \in \mathrm{Wf}$
2. $x \in \mathrm{Wf} \land y \subseteq x \to y \in \mathrm{Wf}$
3. $x \in \mathrm{Wf} \to \cup x \in \mathrm{Wf} \land \mathfrak{P}(x) \in \mathrm{Wf}$
4. $\mathrm{On} \subseteq \mathrm{Wf}$

(1), (2) の証明.

(1) の証明． $x \subseteq \mathrm{Wf}$ とすると， (*ii*) および 6.4 より $\mathrm{Tc}(x) \supseteq \mathrm{Wf}$.
Wf 上 $\in$ は整礎なので，$\mathrm{Tc}(x)$ 上でも整礎． よって $x \in \mathrm{Wf}$.
(2) の証明． $y \subseteq x \in \mathrm{Wf}$ とする． すると $\mathrm{Tc}(y) \subseteq \mathrm{Tc}(x)$． よって
$\mathrm{Tc}(y)$ 上 $\in$ は整礎関係となり，$y \in \mathrm{Tc}$ となる． ∎

Wf の性質 II

(3) の証明.

$x \in \mathrm{Wf}$ とする．このとき $\mathrm{Tc}(x)$ 上 $\in$ は整礎．$y \in x \in \mathrm{Wf}$ とすると，Wf が推移的クラスであることから $y \in \mathrm{Wf}$．よって
$y \subseteq \mathrm{Wf}$．よって $\cup x \subseteq \mathrm{Wf}$．(1) より $\cup x \in \mathrm{Wf}$.
次に，$y \subseteq x \in \mathrm{Wf}$ とする．このとき $y \subseteq \mathrm{Wf}$ となるので
$y \in \mathrm{Wf}$．よって $\mathfrak{P}(x) \subseteq \mathrm{Wf}$ であり，従って $\mathfrak{P}(x) \in \mathrm{Wf}$. ∎

(4) の証明.

$\alpha \in \mathrm{On} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha$は推移的で $\in$ により整列 であった．整列関係は整礎関係でもあり，$\alpha = \mathrm{Tc}(\alpha)$ 上 $\in$ は整礎となるので，従って
$\alpha \in \mathrm{Wf}$．よって $\mathrm{On} \subseteq \mathrm{Wf}$. ∎

整礎集合の rank とその性質

Def. 6.6

整礎集合 $x \in \mathrm{Wf}$ の rank $\rho(x)$ とは，$\in|\mathrm{Wf}$-rank のこと．即ち，

$$\rho(x) = \rho_{\in|\mathrm{Wf}}(x).$$

$\rho(x)$ が常に順序数となることは容易に確かめられる．

Cor. 6.7

$x \in \mathrm{Wf} \to \rho(x) = \sup^{+}\{\, \rho(y) \mid y \in x \,\}$．また，
$y \in \mathrm{Wf} \wedge x \in y \to x \in \mathrm{Wf} \wedge \rho(x) < \rho(y)$

Prop. 6.8

任意の順序数 α に対し，$\rho(\alpha) = \alpha$

6.8 の証明.

α に関する順序数の帰納法で示す．帰納法の仮定は,

$$(\forall\beta < \alpha)\rho(\beta) = \beta.$$

ここで,

$$\rho(\alpha) = \sup{}^{+} \{ \rho(\beta) \mid \beta \in \alpha \} = \sup{}^{+} \{ \beta \mid \beta \in \alpha \} = \sup{}^{+} \alpha = \alpha$$

よって示された. ∎

Exercise 6.9

1. x : 推移的整礎集合 $\Rightarrow \rho(x) = \{\, \rho(y) \mid y \in x \,\}$
   即ち，x は $\rho(x)$ 未満の各ランクの元を持つ．
2. $x \in \mathrm{Wf} \to \forall z(x \in z \to (\exists y \in z)(y \cap z = 0))$

(1) の証明.

x は推移的集合であるから，特に $\in^{-1}$-closed である．よって，$\rho[x] = \{\, \rho(y) \mid y \in x \,\}$ は 5.14 (vi) の補題より，On と一致するか順序数である．今，x は集合なので，$\rho[x] \in \mathrm{On}$．ρ は $\in$ の rank なので，$(\forall y \in x)\rho(y) < \rho(x)$．$\therefore \rho[x] \subseteq \rho(x)$.
また，$\rho(y) < \rho[x]$ なので，$\rho[x]$ は x の狭義上界．よって，$\rho(x)$ が x の最小狭義上界であることから，$\rho(x) = \rho[x]$．よって
$\rho[x] = \rho(x)$. ∎

演習問題 II

(2) の $\to$ 方向.

$x \in \mathrm{Wf}, x \in z$ とする．すると $\mathrm{Wf} \cap z \neq 0$ は Wf の部分集合であるので，$\in$-極小元を取ることが出来る．これが $y \cap z = 0$ を満たすことは容易に判る． $\blacksquare$

演習問題 III

(2) の $\leftarrow$ 方向.

右辺の対偶を取ると，$\forall z((\forall y \in z)(y \cap z \neq 0) \rightarrow x \notin z)$.
そこで，特に $z = \mathrm{Tc}(\{x\}) \setminus \mathrm{Wf}$ と置く．$x \in \mathrm{Tc}(\{x\})$ より
$x \notin z$ が云えれば $x \in \mathrm{Wf}$ が云える．
$z = 0$ ならばよい．そこで $z \neq 0$ として，$y \in z$ を取る．特に
$y \notin \mathrm{Wf}$ より $\mathrm{Tc}(y)$ には $\in$-極小元が存在しない：

$$(\forall u \in \mathrm{Tc}(y))(\exists v \in \mathrm{Tc}(y)) v \in u$$

特に $y \subseteq \mathrm{Tc}(y)$ より $u \in y$ にとれば，
$(\forall u \in y)(\exists v \in \mathrm{Tc}(y)) v \in u$．もし v が整礎集合なら，$\mathrm{Tc}(y)$ の
$\in$-極小元が取れることになるので $v \notin \mathrm{Wf}$．よって $v \in z$ であり，
$(\forall u \in y)(\exists v \in z) v \in u$ となる．よって $y \cap z \neq 0$．$y \in z$ は任意
であったから，仮定より $x \notin z$ となる． ∎

Prop. 6.10 (Mirimanoff 1917)

$\{ x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) < \alpha \}$ は集合.

Proof.

$S_\alpha := \{ x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) < \alpha \}$ とおき，S_α が集合であることを α に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ のときは自明.

- $\underline{\alpha = \beta + 1 \text{ のとき}}$．$S_\beta$ が集合であるとする．今,

$$S_{\beta+1} = \{ x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) < \beta + 1 \} = \{ x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) \leq \beta \}$$

  $x \in y \in S_{\beta+1}$ とすると，6.7 より $x \in \mathrm{Wf} \wedge \rho(x) < \rho(y)$. よって $x \in S_\beta$ となるので，$y \subseteq S_\beta$．従って $y \in \mathfrak{P}(S_\beta)$ となるので，$S_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{P}(S_\beta)$．以上から，部分集合公理および冪集合公理より $S_{\beta+1}$ も集合.

∎

続き．

- $\underline{\beta = \lambda\text{（極限順序数）のとき}}$．このとき，

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{\, x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) < \lambda \,\} \\ &= \bigcup_{\beta<\lambda} \{\, x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) < \beta \,\} = \bigcup_{\beta<\lambda} S_\beta \end{aligned}$$

帰納法の仮定より各 S_β は集合であり，λ も集合であるので，従って S_λ も集合となる．

∎

$R(\alpha)$ とその性質

Def. 6.11

On 上の函数 R を次により定義する.

$$R(\alpha) = \{\, x \in \mathrm{Wf} \mid \rho(x) < \alpha \,\}$$

（右辺は 6.10 より集合となる）

Prop. 6.12

1. $R(\alpha)$ は推移的集合.
2. $\mathrm{Wf} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} R(\alpha)$
3. $x \subseteq R(\alpha) \leftrightarrow x \in \mathrm{Wf} \wedge \rho(x) \leq \alpha$
4. $x \in \mathrm{Wf} \to \rho(x) = (x \subseteq R(\alpha)$ となる最小の$\alpha)$
5. $R(\alpha) = \cup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(R(\beta))$
6. $\alpha < \beta \to R(\alpha) \subseteq R(\beta)$
7. $R(\alpha+1) = \mathfrak{P}(R(\alpha))$
8. α : 極限順序数 $\to R(\alpha) = \cup_{\beta<\alpha} R(\beta)$

$(i), (ii)$ の証明.

(i) の証明． $x \in R(\alpha)$ とする． $\rho(x) < \alpha \wedge \mathrm{Wf}$ となるので， 6.7 より $\rho(y) < \rho(x) < \alpha$ かつ $y \in \mathrm{Wf}$． よって $u \in R(\alpha)$.
(ii) の証明． $x \in \mathrm{Wf}$ について $\rho(x) \in \mathrm{On}$ より $\rho(x) < \rho(x) + 1$ となるので， $x \in R(\rho(x) + 1)$． よって $\mathrm{Wf} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} R(\alpha)$． 逆向きの包含関係は明らか. ∎

(iii) の $(\leftarrow)$.

$x \in \mathrm{Wf}, \rho(x) \leq \alpha$ とする． $y \in x$ とすると， 6.7 より $y \in \mathrm{Wf}$ かつ $\rho(y) < \rho(x) \leq \alpha$． よって $x \subseteq R(\alpha)$ ∎

(iii) の $(\to)$.

$x \subseteq R(\alpha)$ とする．このとき $x \subseteq R(\subseteq) \subseteq \mathrm{Wf}$ より $x \in Wf$ である．よって，$y \in x$ とすれば $\rho(y) < \rho(x)$ で $y \in \mathrm{Wf}$ となる．今 $x \subseteq R(\alpha)$ だから $\rho(y) < \alpha$．$\alpha \notin R(\alpha)$ に注意すれば，これは α が $\rho[x]$ の狭義上界であると云うことである．他方，
$\rho(x) = \sup^{+} \rho[x]$ であるから，$\rho(x) \leq \alpha$ となる． ∎

(iv) の証明.

$x \in \mathrm{Wf}$ とし，$\alpha = \rho(x)$ と置く．このとき，$\rho(x) \leq \alpha$ であるので，(iii) より $x \subseteq R(\alpha)$ は OK．後は最小性を示せばよい．
$x \subseteq R(\beta)$ とすると $\rho(x) \leq \beta$．$y \in R(\alpha)$ を取ると，
$\rho(y) < \alpha = \rho(x)$ であり $y \in \mathrm{Wf}$．よって推移律より $\rho(y) < \beta$ となるので，$y \in R(\beta)$．よって $R(\alpha) \subseteq R(\beta)$． ∎

(v) の証明.

$(\subseteq)$ を示す．$x \in R(\alpha)$ とする．即ち，$x \in \mathrm{Wf} \land \rho(x) < \alpha$ とする．$\rho(x) \leq \rho(x)$ だから，(iii) より $x \subseteq R(\rho(x))$．$\therefore x \in \mathfrak{P}(R(\rho(x)))$．よって OK.
$(\supseteq)$ を示す．$x \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(R(\beta))$ とする．即ち $(\exists \beta < \alpha)(x \in \mathfrak{P}(R(\beta)))$ とする．$x \subseteq R(\beta)$ となるので，$\rho(x) \leq \beta$．$\beta < \alpha$ より $\rho(x) < \alpha$ となり，従って $x \in R(\alpha)$．よって示された. ∎

(vi) の証明.

$\alpha < \beta$ とする.

$$x \in R(\alpha) \leftrightarrow x \in \mathrm{Wf} \land \rho(x) < \alpha \to x \in \mathrm{Wf} \land \rho(x) < \beta \leftrightarrow x \in R(\beta)$$

∎

(*vii*) の証明.

$$
\begin{aligned}
x \in R(\alpha+1) &\Leftrightarrow \rho(x) < \alpha + 1 \\
&\Leftrightarrow \rho(x) \leq \alpha \\
&\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} x \subseteq R(\alpha) \\
&\Leftrightarrow x \in \mathfrak{P}(R(\alpha))
\end{aligned}
$$

よって示された. ∎

Proof.

α : 極限順序数 とする．(v) より，

$$R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(R(\beta))$$

ここで，(vii) と，(vi) より $R(\beta) \subseteq R(\beta+1)$ であることから，

$$R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta+1) \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta).$$

α が極限順序数であることから，$\beta < \beta + 1 < \alpha$ であり，
$x \in R(\beta+1) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$．よって示された． ∎

整礎関係に関する長い議論の果てに，ρ と R の概念に到達した．しかし，逆に On 上の函数 R を (v) によって定義して，(ii) によって Wf を，(iv) によって ρ を定めることも出来る．

累積的な階層

$R(\alpha)$ は具体的にどういうものなのだろうか？前の命題から，次のような生成段階であることがわかる．

1. 始めは何もない状態 0 からスタートする．
2. 前段までに作った集合全体に，その部分集合を継ぎ足す

これを繰り返して得られるのが $R(\alpha)$ であり，これにより Wf を全てカバーすることが出来る．これによって，次の三つを直接的に示すことが出来る．

1. $x \notin x$
2. $x \in y_n \in y_{n-1} \in \cdots \in y_2 \in y_1 \in x$ なる列 y はない．
3. $\cdots \in y_{n+1} \in y_n \in \cdots \in y_2 \in y_1 \in x$ なる列 y もない．