Lebesgue 可測性に関する Solovay-Shelah の結果に必要な記述集合論のごく基本的な事項

石井大海

筑波大学数理物質科学研究科
数学専攻 博士前期課程一年

November 20, 2014

目次

自己紹介

- 石井大海（いしい・ひろみ）
  - 筑波大学数理物質科学研究科数学専攻 博士前期課程一年
  - 専門：公理的集合論（塩谷研）
- 現在勉強している内容についてお話します

内容と動機

- 動機：Lebesgue 可測性の無矛盾性に関する Solovay-Shelah の結果を理解したい

内容と動機

- 動機：Lebesgue 可測性の無矛盾性に関する Solovay-Shelah の結果を理解したい
  - Solovay 「ZFC+到達不能基数の存在」が無矛盾なら，「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」も無矛盾

内容と動機

- 動機：Lebesgue 可測性の無矛盾性に関する Solovay-Shelah の結果を理解したい

Solovay 「ZFC+到達不能基数の存在」が無矛盾なら，「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」も無矛盾

Shelah 上の逆が成り立つ．即ち「ZFC+到達不能基数の存在」と「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」は無矛盾等価である．

内容と動機

- 動機：Lebesgue 可測性の無矛盾性に関する Solovay-Shelah の結果を理解したい

  Solovay 「ZFC+到達不能基数の存在」が無矛盾なら，「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」も無矛盾

  Shelah 上の逆が成り立つ．即ち「ZFC+到達不能基数の存在」と「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」は無矛盾等価である．

- 今回：Solovay-Shelah そのものには立ち入らず，現在勉強中の前提知識について

内容と動機

- 動機：Lebesgue 可測性の無矛盾性に関する Solovay-Shelah の結果を理解したい

  Solovay　「ZFC+到達不能基数の存在」が無矛盾なら，「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」も無矛盾

  Shelah　上の逆が成り立つ．即ち「ZFC+到達不能基数の存在」と「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」は無矛盾等価である．

- 今回：Solovay-Shelah そのものには立ち入らず，現在勉強中の前提知識について

⋆ 特に記述集合論の基本知識について

内容と動機

- 動機：Lebesgue 可測性の無矛盾性に関する Solovay-Shelah の結果を理解したい

  Solovay 「ZFC+到達不能基数の存在」が無矛盾なら，「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」も無矛盾

  Shelah 上の逆が成り立つ．即ち「ZFC+到達不能基数の存在」と「ZF + DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測」は無矛盾等価である．

- 今回：Solovay-Shelah そのものには立ち入らず，現在勉強中の前提知識について

⋆ 特に記述集合論の基本知識について

- 動機を見据えて，以下選択公理は制限された従属選択公理（DC）のみを用いる

基本的な事項 I

Definition 1

- κ が正則 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ κ は長さ・濃度 κ 未満の列で近似出来ない
- κ が強極限基数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\lambda < \kappa\,[2^\lambda < \kappa]$
- κ が到達不能基数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ κ は正則な強極限基数.
- 次の言明を従属選択公理（DC）と呼ぶ：

$$\forall A \forall R \subseteq A \times A\,[\forall x \in A \exists y \in A\,(y\,R\,x) \longrightarrow \exists \{x_n\}_{n<\omega} \subseteq A\,\forall n < \omega\,(x_{n+1}\,R\,x_n)]$$

基本的な事項 II

Fact 2

- 選択公理の下で，*Lebesgue* 非可測な実数の集合が存在する．
- κ を到達不能基数とすると，$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$．従って到達不能基数から ZFC の無矛盾性が出るので，不完全性定理より到達不能基数の存在は ZFC から証明出来ない．

目次

記述集合論：解析的集合と木 I

- 記述集合論は実数の定義可能集合を扱う集合論の一分野

記述集合論：解析的集合と木 I

- 記述集合論は実数の定義可能集合を扱う集合論の一分野
- 扱う性質の多くは一般のポーランド空間についても成立する

記述集合論：解析的集合と木 I

- 記述集合論は実数の定義可能集合を扱う集合論の一分野
- 扱う性質の多くは一般のポーランド空間についても成立する

Definition 3

位相空間 X がポーランド空間 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は可分完備距離化可能空間

記述集合論：解析的集合と木 I

- 記述集合論は実数の定義可能集合を扱う集合論の一分野
- 扱う性質の多くは一般のポーランド空間についても成立する

Definition 3

位相空間 X がポーランド空間 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は可分完備距離化可能空間

- その中でも専ら扱うのは Baire 空間やその直積である.

記述集合論：解析的集合と木 II

Definition 4 (Baire 空間)

自然数の可算列全体 ${}^\omega\omega = \{ f : \omega \to \omega \}$ に次の形の集合を基本開集合とする位相を入れた空間を Baire 空間と呼び，$\mathcal{N}$ で表す．

$$O(s) := \{ \sigma \in {}^\omega\omega : \sigma \supseteq s \} \quad (s \in {}^{<\omega}\omega)$$

Fact 5

- *Baire* 空間はポーランド空間である．$d(f, f) = 0$, $d(f, g) = \frac{1}{n+1}$（但し $n = \min \{ k : f(k) \neq g(k) \}$）は距離の例
- *Baire* 空間の基本開集合は閉集合の可算共通部分で書け，従って閉集合でもある：$O(s) = \bigcap_{t \in {}^{\mathrm{lh}(s)}\omega, t \neq s} O(t)^c$
- 「一致する桁数が多いほど近い」位相になっている．
- *Baire* 空間は連分数展開を通じて無理数の空間と同相となる．

扱う集合の例

- 一番基本的な例：開集合と閉集合

扱う集合の例

- 一番基本的な例：開集合と閉集合
- それらの補集合，可算和・可算共通部分により得られる Borel 集合も代表例

扱う集合の例

- 一番基本的な例：開集合と閉集合
- それらの補集合，可算和・可算共通部分により得られる Borel 集合も代表例
- これらの背後にある操作を探ると，自然と木によって記述される集合へと一般化出来る

扱う集合の例

- 一番基本的な例：開集合と閉集合
- それらの補集合，可算和・可算共通部分により得られる Borel 集合も代表例
- これらの背後にある操作を探ると，自然と木によって記述される集合へと一般化出来る
  - こうした形で記述可能な集合について，様々な望ましい性質を示していくのが記述集合論の議論

扱う集合の例

- 一番基本的な例：開集合と閉集合
- それらの補集合，可算和・可算共通部分により得られる Borel 集合も代表例
- これらの背後にある操作を探ると，自然と木によって記述される集合へと一般化出来る
  - こうした形で記述可能な集合について，様々な望ましい性質を示していくのが記述集合論の議論
  - Solovay-Shelah の結果もその延長線上にあるもの（らしい）

望ましい性質

「望ましい性質」の代表例は次の三つ：

Lebesgue 可測性 みんな知ってるやつ

完全集合性質 A が完全集合性質を持つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A は可算であるか完全集合（孤立点を持たない閉集合）を含む

Baire の性質 A が Baire の性質を持つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A と適当な開集合の対称差が meager（A は開集合と疎集合の可算和ぶんの差しかない）

今回は時間（と講演者の理解の度合い）の関係上，完全集合性質について主に議論する．

Baire 空間の閉集合と木

- 一般にポーランド空間の閉集合は完全集合性質を持つ.

Baire 空間の閉集合と木

- 一般にポーランド空間の閉集合は完全集合性質を持つ.
  ⋯ だいたい閉集合から孤立点を取り除いていく感じ

Baire 空間の閉集合と木

- 一般にポーランド空間の閉集合は完全集合性質を持つ.
  ⋯ だいたい閉集合から孤立点を取り除いていく感じ
- 特に，Baire 空間 $\mathcal{N}$ の閉集合については木を用いることで見通しよく議論することが出来る.

Definition 6

Baire 空間の閉集合と木

- 一般にポーランド空間の閉集合は完全集合性質を持つ.
  $\cdots$ だいたい閉集合から孤立点を取り除いていく感じ
- 特に，Baire 空間 $\mathcal{N}$ の閉集合については木を用いることで見通しよく議論することが出来る.

Definition 6

- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ が ω 上の木 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T は始切片について閉じている (i.e. $s \in T, n < \mathrm{lh}(\sigma) \to s \restriction n \in T$)

Baire 空間の閉集合と木

- 一般にポーランド空間の閉集合は完全集合性質を持つ.
  $\cdots$ だいたい閉集合から孤立点を取り除いていく感じ
- 特に，Baire 空間 $\mathcal{N}$ の閉集合については木を用いることで見通しよく議論することが出来る.

Definition 6

- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ が ω 上の木 $\overset{\text{def}}{\iff}$ T は始切片について閉じている (i.e. $s \in T, n < \mathrm{lh}(\sigma) \to s \upharpoonright n \in T$)
- $[T] := \{ \sigma \in \mathcal{N} : \forall n < \omega, \sigma \upharpoonright n \in T \}$ の元を，T を貫く path (path through T, cofinal path in T) と呼ぶ.

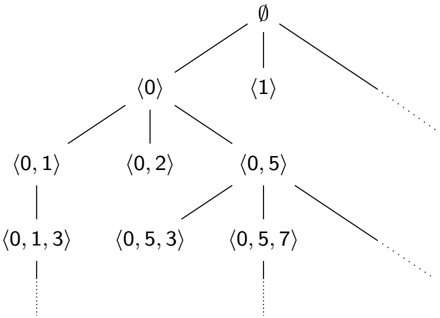
Baire 空間の閉集合と木

- 一般にポーランド空間の閉集合は完全集合性質を持つ．
  … だいたい閉集合から孤立点を取り除いていく感じ
- 特に，Baire 空間 $\mathcal{N}$ の閉集合については木を用いることで見通しよく議論することが出来る．

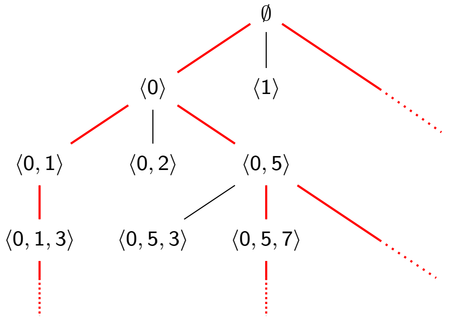
Definition 6

- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ が ω 上の木 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T は始切片について閉じている (i.e. $s \in T, n < \mathrm{lh}(\sigma) \to s \restriction n \in T$)
- $[T] := \{ \sigma \in \mathcal{N} : \forall n < \omega, \sigma \restriction n \in T \}$ の元を，T を貫く path (path through T, cofinal path in T) と呼ぶ．
- $A \subseteq \mathcal{N}$ に対し，$T_A := \{ t \in {}^{<\omega}\omega : \exists \tau \in A, \tau \supseteq t \}$ と置く

木と path


$\emptyset$
$\langle 0 \rangle$
$\langle 1 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 0, 2 \rangle$
$\langle 0, 5 \rangle$
$\langle 0, 1, 3 \rangle$
$\langle 0, 5, 3 \rangle$
$\langle 0, 5, 7 \rangle$

木と path



$$[T] = \left\{ \langle 0, 1, 3, \ldots \rangle , \quad \langle 0, 5, 7, \ldots \rangle \quad , \quad \ldots\ldots \right\}$$

Baire 空間の閉集合と木

Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

Baire 空間の閉集合と木

Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合

Baire 空間の閉集合と木

Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合
2. $\exists T : \omega$ 上の木, $A = [T]$

Baire 空間の閉集合と木

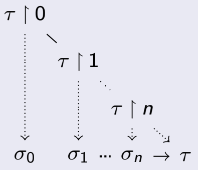
Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合
2. $\exists T : \omega$上の木, $A = [T]$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1)：T を木とする．$f \notin [T]$ とし，$f \restriction n \notin T$ となるような n を取れば，$O(f \restriction n) \subseteq \mathcal{N} \setminus [T]$ となるから $[T]$ は閉集合．
(1) $\Rightarrow$ (2)：A を閉集合とすると，閉集合は極限について閉じていることに気を付ければ右図から $A = [T_A]$ となることがわかる． $\square$



Baire 空間の閉集合と木

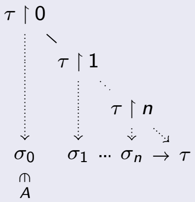
Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合
2. $\exists T : \omega$ 上の木, $A = [T]$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1)：T を木とする．$f \notin [T]$ とし，$f \upharpoonright n \notin T$ となるような n を取れば，$O(f \upharpoonright n) \subseteq \mathcal{N} \setminus [T]$ となるから $[T]$ は閉集合.
(1) $\Rightarrow$ (2)：A を閉集合とすると，閉集合は極限について閉じていることに気を付ければ右図から $A = [T_A]$ となることがわかる. $\square$



Baire 空間の閉集合と木

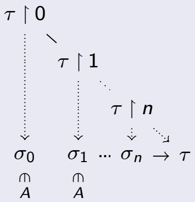
Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合
2. $\exists T : \omega$上の木, $A = [T]$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1)：T を木とする．$f \notin [T]$ とし，$f \restriction n \notin T$ となるような n を取れば，$O(f \restriction n) \subseteq \mathcal{N} \setminus [T]$ となるから $[T]$ は閉集合．
(1) $\Rightarrow$ (2)：A を閉集合とすると，閉集合は極限について閉じていることに気を付ければ右図から $A = [T_A]$ となることがわかる． $\square$



Baire 空間の閉集合と木

Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合
2. $\exists T : \omega$上の木$, A = [T]$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1)：T を木とする．$f \notin [T]$ とし，$f \restriction n \notin T$ となるような n を取れば，$O(f \restriction n) \subseteq \mathcal{N} \setminus [T]$ となるから $[T]$ は閉集合．
(1) $\Rightarrow$ (2)：A を閉集合とすると，閉集合は極限について閉じていることに気を付ければ右図から $A = [T_A]$ となることがわかる． $\square$

$$\begin{tikzcd}
\tau\restriction 0 \arrow[dr, dash] \arrow[ddd, dotted] & & & \\
& \tau\restriction 1 \arrow[dr, dotted, dash] \arrow[dd, dotted] & & \\
& & \tau\restriction n \arrow[dr, dotted] \arrow[d, dotted] & \\
\sigma_0 \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \sigma_1 \cdots \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \sigma_n \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \tau \\
A & A & A &
\end{tikzcd}$$

Baire 空間の閉集合と木

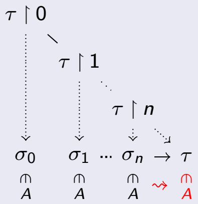
Lemma 7

$A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. A は閉集合
2. $\exists T : \omega$ 上の木, $A = [T]$

Proof.

(2) ⇒ (1)：T を木とする．$f \notin [T]$ とし，$f \restriction n \notin T$ となるような n を取れば，$O(f \restriction n) \subseteq \mathcal{N} \setminus [T]$ となるから $[T]$ は閉集合．
(1) ⇒ (2)：A を閉集合とすると，閉集合は極限について閉じていることに気を付ければ右図から $A = [T_A]$ となることがわかる． □



完全集合の言い換え

- 閉集合 A が完全（perfect）である $\overset{\text{def}}{\iff}$ 孤立点を持たない $\iff$ A の全ての点が A の集積点

完全集合の言い換え

- 閉集合 A が完全（perfect）である $\overset{\text{def}}{\iff}$ 孤立点を持たない $\iff$ A の全ての点が A の集積点
- f が $A \subseteq \mathcal{N}$ の集積点（$f \in \overline{A \setminus \{ f \}}$）とはどういうことか？

完全集合の言い換え

- 閉集合 A が完全（perfect）である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 孤立点を持たない $\Longleftrightarrow$ A の全ての点が A の集積点
- f が $A \subseteq \mathcal{N}$ の集積点（$f \in \overline{A \setminus \{f\}}$）とはどういうことか？
- DC は使えるので，「f でない値を取りながら f に収束する点列が取れる」ということ

完全集合の言い換え

- 閉集合 A が完全（perfect）である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 孤立点を持たない $\Longleftrightarrow$ A の全ての点が A の集積点
- f が $A \subseteq \mathcal{N}$ の集積点（$f \in \overline{A \setminus \{f\}}$）とはどういうことか？
- DC は使えるので，「f でない値を取りながら f に収束する点列が取れる」ということ
- Baire 空間の点列が収束する＝「一致する桁数が延びていく」

完全集合の言い換え

- 閉集合 A が完全（perfect）である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 孤立点を持たない $\Longleftrightarrow$ A の全ての点が A の集積点
- f が $A \subseteq \mathcal{N}$ の集積点（$f \in \overline{A \setminus \{f\}}$）とはどういうことか？
- DC は使えるので，「f でない値を取りながら f に収束する点列が取れる」ということ
- Baire 空間の点列が収束する＝「一致する桁数が延びていく」

$\rightsquigarrow$ f が A の集積点 $\Leftrightarrow \forall n < \omega \exists g \in A (g \neq f \wedge g \restriction n = f \restriction n)$

完全集合の言い換え

- 閉集合 A が完全（perfect）である $\overset{\text{def}}{\iff}$ 孤立点を持たない $\iff$ A の全ての点が A の集積点
- f が $A \subseteq \mathcal{N}$ の集積点（$f \in \overline{A \setminus \{f\}}$）とはどういうことか？
- DC は使えるので，「f でない値を取りながら f に収束する点列が取れる」ということ
- Baire 空間の点列が収束する＝「一致する桁数が延びていく」

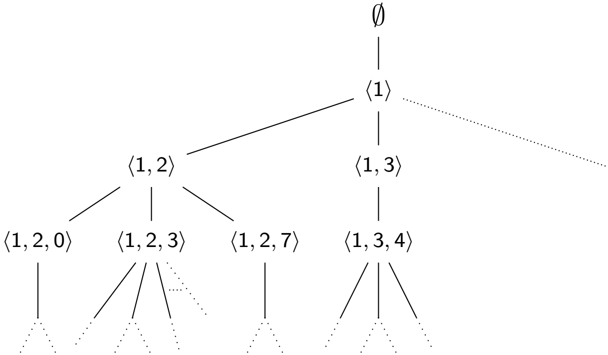
$\rightsquigarrow$ f が A の集積点 $\Leftrightarrow \forall n < \omega \exists g \in A (g \neq f \wedge g \upharpoonright n = f \upharpoonright n)$

- そこで，木と閉集合の対応を鑑みて次のような定義をする：

Definition 8

ω 上の木 T が完全 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall t \in T \exists s, s' \in T\, (s, s' \supseteq t \wedge s \perp s')$
（但し $s \perp s' \overset{\text{def}}{\iff} s \not\subseteq s' \wedge s \not\supseteq s'$）

完全な木のイメージ



完全な木＝（十分先を見れば）常に分岐しつづけているような木

木による完全集合の特徴付け

Lemma 9

閉集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

木による完全集合の特徴付け

Lemma 9

閉集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. T_A は（木として）完全

木による完全集合の特徴付け

Lemma 9

閉集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. T_A は（木として）完全
2. A は完全集合

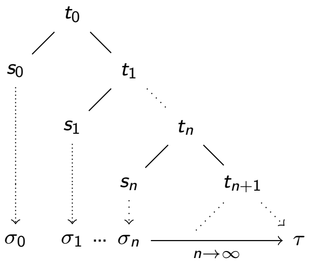
木による完全集合の特徴付け

Lemma 9

閉集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ について次は同値：

1. T_A は（木として）完全
2. A は完全集合

証明は右図から明らか.



Cantor-Bendixon の定理

Theorem 10 (Cantor-Bendixon)

Baire 空間の任意の閉集合は完全集合性質を持つ

証明の方針

1. 今までの結果を踏まえて，対応する木 T が完全になるまで繰り返し刈り込んでいけば良さそう．
2. T の濃度は高々可算だから，可算ステップで刈り込みの結果は空になるか一定になる．
3. 各ステップで刈り込んだ残りの木から得られる閉集合は必ず高々可算であることを示す

証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\, [s, s' \supseteq t \wedge s \perp s'] \,\}$$

とおく．S から一本道を取り除く操作.

証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\,[s, s' \supseteq t \wedge s \perp s']\,\}$$

  とおく．S から一本道を取り除く操作.
- いつも S' が完全になるとは限らない：

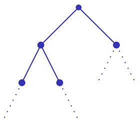
証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\,[s, s' \supseteq t \wedge s \perp s'] \,\}$$

とおく．S から一本道を取り除く操作．

- いつも S' が完全になるとは限らない：



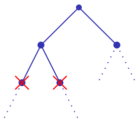
証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\, [s, s' \supseteq t \wedge s \perp s'] \,\}$$

とおく．S から一本道を取り除く操作.

- いつも S' が完全になるとは限らない：

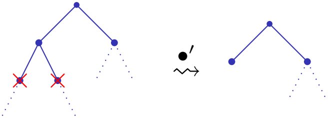


証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\,[s, s' \supseteq t \wedge s \perp s']\,\}$$

  とおく．S から一本道を取り除く操作.
- いつも S' が完全になるとは限らない：

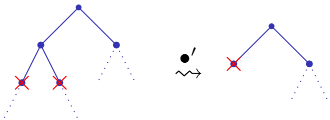


証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\,[s, s' \supseteq t \wedge s \perp s'] \,\}$$

  とおく．S から一本道を取り除く操作．
- いつも S' が完全になるとは限らない：



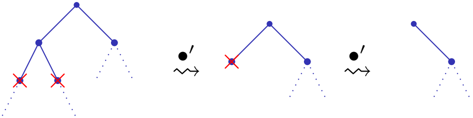
証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\, [s, s' \supseteq t \wedge s \perp s'] \,\}$$

とおく．S から一本道を取り除く操作．

- いつも S' が完全になるとは限らない：

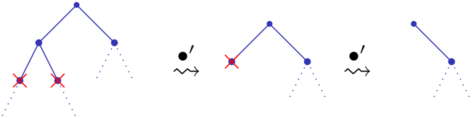


証明：木の刈り込み

- ω 上の木 S に対し，

$$S' := \{\, t \in T : \exists s, s' \in T\, [s, s' \supseteq t \wedge s \perp s'] \,\}$$

  とおく．S から一本道を取り除く操作.
- いつも S' が完全になるとは限らない：



- $S = S' \neq \emptyset \iff S$ は完全.

証明：可算ステップでの終了

- $A = [T]$ なる T を取って，刈り込み操作を繰返す：
  $T_0 = T$, $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$, $T_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} T_\alpha$（$\gamma$：極限順序数）

証明：可算ステップでの終了

- $A = [T]$ なる T を取って，刈り込み操作を繰返す：
  $T_0 = T$, $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$, $T_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} T_\alpha$（$\gamma$：極限順序数）
- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ なので T は高々可算．よってこの反復は高々可算ステップで終わる．
  つまり $T_\eta = T_{\eta+1}$ となるような $\eta < \omega_1$ が存在する．

証明：可算ステップでの終了

- $A = [T]$ なる T を取って，刈り込み操作を繰返す：
  $T_0 = T$, $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$, $T_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} T_\alpha$（$\gamma$：極限順序数）
- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ なので T は高々可算．よってこの反復は高々可算ステップで終わる．
  つまり $T_\eta = T_{\eta+1}$ となるような $\eta < \omega_1$ が存在する．
  ∵ さもないと，$t_\xi \in T_\xi \setminus T_{\xi+1}$ を取れば $\{ t_\xi : \xi < \omega_1 \}$ は非可算濃度となり $|T| \leq \aleph_0$ に反する．

証明：可算ステップでの終了

- $A = [T]$ なる T を取って，刈り込み操作を繰返す：
  $T_0 = T$, $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$, $T_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} T_\alpha$ （γ：極限順序数）
- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ なので T は高々可算．よってこの反復は高々可算ステップで終わる．
  つまり $T_\eta = T_{\eta+1}$ となるような $\eta < \omega_1$ が存在する．
  $\because$ さもないと，$t_\xi \in T_\xi \setminus T_{\xi+1}$ を取れば $\{\, t_\xi : \xi < \omega_1 \,\}$ は非可算濃度となり $|T| \leq \aleph_0$ に反する．
- そこで $T_\eta \neq \emptyset$ なら $[T_\eta]$ は A に含まれる完全集合となる．

証明：可算ステップでの終了

- $A = [T]$ なる T を取って，刈り込み操作を繰返す：
  $T_0 = T$, $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$, $T_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} T_\alpha$（$\gamma$：極限順序数）
- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ なので T は高々可算．よってこの反復は高々可算ステップで終わる．
  つまり $T_\eta = T_{\eta+1}$ となるような $\eta < \omega_1$ が存在する．
  $\cdots$ さもないと，$t_\xi \in T_\xi \setminus T_{\xi+1}$ を取れば $\{ t_\xi : \xi < \omega_1 \}$ は非可算濃度となり $|T| \leq \aleph_0$ に反する．
- そこで $T_\eta \neq \emptyset$ なら $[T_\eta]$ は A に含まれる完全集合となる．
- 残りの $[T] \setminus [T_\eta]$ が高々可算であることを示せば証明が完了．

証明：可算ステップでの終了

- $A = [T]$ なる T を取って，刈り込み操作を繰返す：
  $T_0 = T$, $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$, $T_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} T_\alpha$（$\gamma$：極限順序数）
- $T \subseteq {}^{<\omega}\omega$ なので T は高々可算．よってこの反復は高々可算ステップで終わる．
  つまり $T_\eta = T_{\eta+1}$ となるような $\eta < \omega_1$ が存在する．
  $\because$ さもないと，$t_\xi \in T_\xi \setminus T_{\xi+1}$ を取れば $\{ t_\xi : \xi < \omega_1 \}$ は非可算濃度となり $|T| \leq \aleph_0$ に反する．
- そこで $T_\eta \neq \emptyset$ なら $[T_\eta]$ は A に含まれる完全集合となる．
- 残りの $[T] \setminus [T_\eta]$ が高々可算であることを示せば証明が完了．
- 定義から $[T] \setminus [T_\eta] = \bigcup_{\alpha<\eta}([T_\alpha] \setminus [T'_\alpha])$ なので，各 $[T_\alpha] \setminus [T'_\alpha]$ が可算であることが云えればよい．

証明：刈り込んだ残りが可算

Claim 1

ω 上の任意の木 S について $|[S] \setminus [S']| \leq \aleph_0$

Proof.

- $\sigma \in [S] \setminus [S']$ とすると $\sigma \upharpoonright n \notin S'$ となる最小の n が取れる

$\square$

証明：刈り込んだ残りが可算

Claim 1

ω 上の任意の木 S について $|[S] \setminus [S']| \leq \aleph_0$

Proof.

- $\sigma \in [S] \setminus [S']$ とすると $\sigma \restriction n \notin S'$ となる最小の n が取れる
- そこで写像 $s : [S] \setminus [S'] \to {}^{<\omega}\omega$ を $s(\sigma) := \sigma \restriction n$ で定める.

$\square$

証明：刈り込んだ残りが可算

Claim 1

ω 上の任意の木 S について $|[S] \setminus [S']| \leq \aleph_0$

Proof.

- $\sigma \in [S] \setminus [S']$ とすると $\sigma \restriction n \notin S'$ となる最小の n が取れる
- そこで写像 $s : [S] \setminus [S'] \to {}^{<\omega}\omega$ を $s(\sigma) := \sigma \restriction n$ で定める.
- 対応 $\sigma \mapsto s(\sigma)$ は単射となる.

$\square$

証明：刈り込んだ残りが可算

Claim 1

ω 上の任意の木 S について $|[S] \setminus [S']| \leq \aleph_0$

Proof.

- $\sigma \in [S] \setminus [S']$ とすると $\sigma \restriction n \notin S'$ となる最小の n が取れる
- そこで写像 $s : [S] \setminus [S'] \to {}^{<\omega}\omega$ を $s(\sigma) := \sigma \restriction n$ で定める．
- 対応 $\sigma \mapsto s(\sigma)$ は単射となる．

  $(\because)$ $s(\sigma) = s(\tau) \notin S'$ とすると，S' の定義から $s(\sigma), s(\tau)$ より上の S の元は全順序で並んでいる．よって特に σ, τ の任意有限部分は一致するから，結局 $\sigma = \tau$ となる．

$\square$

証明：刈り込んだ残りが可算

Claim 1

ω 上の任意の木 S について $|[S] \setminus [S']| \leq \aleph_0$

Proof.

- $\sigma \in [S] \setminus [S']$ とすると $\sigma \restriction n \notin S'$ となる最小の n が取れる
- そこで写像 $s : [S] \setminus [S'] \to {}^{<\omega}\omega$ を $s(\sigma) := \sigma \restriction n$ で定める.
- 対応 $\sigma \mapsto s(\sigma)$ は単射となる.
  $(\because)$ $s(\sigma) = s(\tau) \notin S'$ とすると，S' の定義から $s(\sigma), s(\tau)$ より上の S の元は全順序で並んでいる．よって特に σ, τ の任意有限部分は一致するから，結局 $\sigma = \tau$ となる．
- よって $[S] \setminus [S']$ は ${}^{<\omega}\omega$ に埋め込めるので，高々可算.

$\square$

完全集合性質は何故大事なのか？

- 今までの議論から，$\mathcal{N}$ の閉集合は木として表現出来た

完全集合性質は何故大事なのか？

- 今までの議論から，$\mathcal{N}$ の閉集合は木として表現出来た
- 木が完全である $\iff$ ある頂点から先を辿っていくと必ず二つ以上に分岐している

完全集合性質は何故大事なのか？

- 今までの議論から，$\mathcal{N}$ の閉集合は木として表現出来た
- 木が完全である $\iff$ ある頂点から先を辿っていくと必ず二つ以上に分岐している

$\rightsquigarrow$ A が完全集合なら，完全二分木 ${}^{<\omega}2$ から T_A への（順序を保つ）単射が存在する

完全集合性質は何故大事なのか？

- 今までの議論から，$\mathcal{N}$ の閉集合は木として表現出来た
- 木が完全である $\iff$ ある頂点から先を辿っていくと必ず二つ以上に分岐している

$\rightsquigarrow$ A が完全集合なら，完全二分木 ${}^{<\omega}2$ から T_A への（順序を保つ）単射が存在する

$\rightsquigarrow$ 完全二分木の path は連続体濃度．よって T_A の path として表現出来る A の濃度も連続体濃度

完全集合性質は何故大事なのか？

- 今までの議論から，$\mathcal{N}$ の閉集合は木として表現出来た
- 木が完全である $\iff$ ある頂点から先を辿っていくと必ず二つ以上に分岐している

$\leadsto$ A が完全集合なら，完全二分木 ${}^{<\omega}2$ から T_A への（順序を保つ）単射が存在する

$\leadsto$ 完全二分木の path は連続体濃度．よって T_A の path として表現出来る A の濃度も連続体濃度

$\leadsto$ A が完全集合性質を持つ $\Longrightarrow$ A は非可算なら連続体濃度

完全集合性質は何故大事なのか？

- 今までの議論から，$\mathcal{N}$ の閉集合は木として表現出来た
- 木が完全である $\iff$ ある頂点から先を辿っていくと必ず二つ以上に分岐している

$\rightsquigarrow$ A が完全集合なら，完全二分木 ${}^{<\omega}2$ から T_A への（順序を保つ）単射が存在する

$\rightsquigarrow$ 完全二分木の path は連続体濃度．よって T_A の path として表現出来る A の濃度も連続体濃度

$\rightsquigarrow$ A が完全集合性質を持つ $\implies$ A は非可算なら連続体濃度

⋆ informal には，より多くの集合が完全集合性質を持てば，それだけ連続体仮説の信憑性が高まる

解析的集合と木

木を使った見通しの良い議論で，集合が好ましい性質を持つことを証明出来た．この論法を一般化出来ないだろうか？

解析的集合と木

木を使った見通しの良い議論で，集合が好ましい性質を持つことを証明出来た．この論法を一般化出来ないだろうか？

Definition 11

$\alpha \geq \omega$ とする．

解析的集合と木

木を使った見通しの良い議論で，集合が好ましい性質を持つことを証明出来た．この論法を一般化出来ないだろうか？

Definition 11

$\alpha \geq \omega$ とする．

- T が $\omega \times \alpha$ 上の木 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T \subseteq \bigcup_{n<\omega} {}^n\omega \times {}^n\alpha$ であり，T は始切片について閉じている．

解析的集合と木

木を使った見通しの良い議論で，集合が好ましい性質を持つことを証明出来た．この論法を一般化出来ないだろうか？

Definition 11

$\alpha \geq \omega$ とする．

- T が $\omega \times \alpha$ 上の木 $\overset{\text{def}}{\iff} T \subseteq \bigcup_{n<\omega} {}^n\omega \times {}^n\alpha$ であり，T は始切片について閉じている．
- $[T] := \{ (\sigma, \tau) \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\alpha : \forall n < \omega \, (\sigma \restriction n, \tau \restriction n) \in T \}$ の元を T を貫く path（path through T）と呼ぶ．

解析的集合と木

木を使った見通しの良い議論で，集合が好ましい性質を持つことを証明出来た．この論法を一般化出来ないだろうか？

Definition 11

$\alpha \geq \omega$ とする．

- T が $\omega \times \alpha$ 上の木 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T \subseteq \bigcup_{n<\omega} {}^n\omega \times {}^n\alpha$ であり，T は始切片について閉じている．
- $[T] := \{ (\sigma, \tau) \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\alpha : \forall n < \omega \, (\sigma \restriction n, \tau \restriction n) \in T \}$ の元を T を貫く path（path through T）と呼ぶ．
- $p[T] := \{ \sigma \in \mathcal{N} : \exists \tau \in {}^\omega\alpha, \langle \sigma, \tau \rangle \in [T] \}$ を T の射影と呼ぶ

解析的集合と木

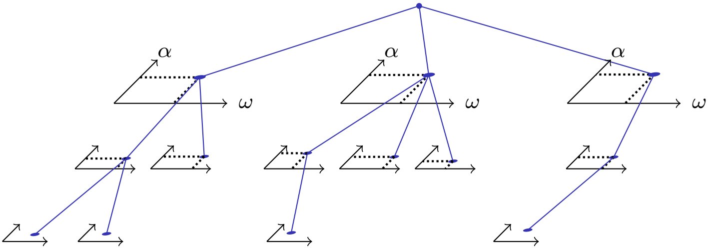
木を使った見通しの良い議論で，集合が好ましい性質を持つことを証明出来た．この論法を一般化出来ないだろうか？

Definition 11

$\alpha \geq \omega$ とする．

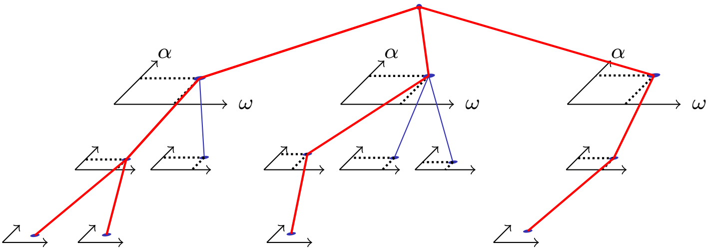
- T が $\omega \times \alpha$ 上の木 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T \subseteq \bigcup_{n<\omega} {}^n\omega \times {}^n\alpha$ であり，T は始切片について閉じている．
- $[T] := \{ (\sigma, \tau) \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\alpha : \forall n < \omega \, (\sigma \restriction n, \tau \restriction n) \in T \}$ の元を T を貫く path（path through T）と呼ぶ．
- $p[T] := \{ \sigma \in \mathcal{N} : \exists \tau \in {}^\omega\alpha, \langle \sigma, \tau \rangle \in [T] \}$ を T の射影と呼ぶ
- $x \in \mathcal{N}$ に対し $T_x := \{ s \in {}^{<\omega}\alpha : (x \restriction \mathrm{lh}(s), s) \in T \}$ とおく

$\omega \times \alpha$ 上の木



$\omega \times \omega$ 上の木の概念図

$\omega \times \alpha$ 上の木



木を貫く path を取り各頂点を ω 軸に射影したものが $p[T]$

解析的集合と Suslin 演算 I

Definition 12

- $A \subseteq \mathcal{N}$ が解析的 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists T$: tree on $\omega \times \omega, A = p[T]$

解析的集合と Suslin 演算 I

Definition 12

- $A \subseteq \mathcal{N}$ が解析的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists T$: tree on $\omega \times \omega, A = p[T]$
- $\mathbf{\Sigma}^1_1 := \{ A \subseteq \mathcal{N} : A$ は解析的 $\}$

解析的集合と Suslin 演算 I

Definition 12

- $A \subseteq \mathcal{N}$ が解析的 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists T$: tree on $\omega \times \omega, A = p[T]$
- $\boldsymbol{\Sigma}^1_1 := \{ A \subseteq \mathcal{N} : A$ は解析的 $\}$
- A が補解析的（coanalytic） $\overset{\text{def}}{\iff} A$ は解析的集合の補集合

解析的集合と Suslin 演算 I

Definition 12

- $A \subseteq \mathcal{N}$ が解析的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists T$: tree on $\omega \times \omega, A = p[T]$
- $\mathbf{\Sigma}^1_1 := \{\, A \subseteq \mathcal{N} : A$ は解析的 $\}$
- A が補解析的（coanalytic）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A は解析的集合の補集合
- $\mathbf{\Pi}^1_1 := \{\, A \subseteq \mathcal{N} : A$ は補解析的 $\}$, $\mathbf{\Delta}^1_1 := \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$

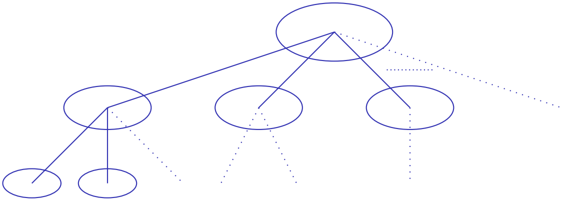
解析的集合と Suslin 演算 I

Definition 12

- $A \subseteq \mathcal{N}$ が解析的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists T$: tree on $\omega \times \omega, A = p[T]$
- $\mathbf{\Sigma}^1_1 := \{ A \subseteq \mathcal{N} : A$ は解析的 $\}$
- A が補解析的（coanalytic） $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A は解析的集合の補集合
- $\mathbf{\Pi}^1_1 := \{ A \subseteq \mathcal{N} : A$ は補解析的 $\}$, $\mathbf{\Delta}^1_1 := \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$
- $\{ A_s \subseteq \mathcal{N} : s \in {}^{<\omega}\omega \}$ が $s \subseteq t \to A_s \supseteq A_t$ を満たす時，Suslin 演算 $\mathcal{A}_s A_s$ を次で定義する：

$$\mathcal{A}_s A_s := \bigcup_{\sigma \in {}^\omega\omega} \bigcap_{n<\omega} A_{\sigma \restriction n}$$

Suslin 演算のイメージ



- 各頂点に点集合が割り当てられていて，レベル毎にどんどん細かくなっていく
- それが「収束」する先を全部集める
- 「収束」といっても一点になる訳ではない
- $p[T]$ の操作と似ている

解析的集合と Suslin 演算 II

Lemma 13

$A \subseteq \mathcal{N}$ に対し，次は同値：

1. A は解析的
2. 閉集合の族 $\{\, A_s \subseteq \mathcal{N} : s \in {}^{<\omega}\omega \,\}$ が存在し，$A = \mathcal{A}_s A_s$

補題の証明 I

まずは $p[T]$ が実際に $\mathcal{A}$ で書けることを観察する.

$$\begin{aligned} p[T] &= \{ \sigma \in \mathcal{N} : \exists \tau \in {}^\omega\omega, \langle \sigma, \tau \rangle \in [T] \} \\ &= \{ \sigma \in \mathcal{N} : \exists \tau \in {}^\omega\omega \forall n < \omega, \langle \sigma \restriction n, \tau \restriction n \rangle \in T \} \end{aligned}$$

そこで $A^T_s := \{ \sigma \in \mathcal{N} : (\sigma \restriction \mathrm{lh}(s), s) \in T \}$ とおけば,

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sigma \in \mathcal{N} : \exists \tau \in {}^\omega\omega \forall n < \omega, \sigma \in A^T_{\tau\restriction n} \right\} \\ &= \bigcup_{\tau \in {}^{<\omega}\omega} \bigcap_{n<\omega} A^T_{\tau\restriction n} = \mathcal{A}_t A^T_t \end{aligned}$$

以上を踏まえて証明する.

補題の証明 II

Proof.

解析的 ⇒ 閉集合の Suslin 演算．$A = p[T]$ とすれば，あとは上の各 A^T_t が閉集合であることが云えればよい．これは，適当な収束点列を持ってきた時，十分先の方を見てやれば長さ $\mathrm{lh}(s)$ までは変化がないように出来る事から明らか．

閉集合の Suslin 演算 ⇒ 解析的．$T := \{ (x \restriction \mathrm{lh}(s), s) : x \in A_s \}$ と置けばよい． □

この特徴付けにより，一般のポーランド空間で解析的集合を定義することも出来る．

解析的集合の完全集合性質

- このように解析的集合を定義すれば，先程の Cantor-Bendixon の定理を解析的集合に一般化するのは容易い．

解析的集合の完全集合性質

- このように解析的集合を定義すれば，先程の Cantor-Bendixon の定理を解析的集合に一般化するのは容易い．
- $\omega \times \alpha$ 上の木の射影として表せる集合を α-Suslin 集合と呼ぶことにすれば，より一般に次が示せる：

解析的集合の完全集合性質

- このように解析的集合を定義すれば，先程の Cantor-Bendixon の定理を解析的集合に一般化するのは容易い．
- $\omega \times \alpha$ 上の木の射影として表せる集合を α-Suslin 集合と呼ぶことにすれば，より一般に次が示せる：

Theorem 14

$A \subseteq \mathcal{N}$ が κ-Suslin かつ $|A| \geq \kappa$ なら A は完全集合を含む．

Proof.

明らか． □

解析的集合の例

- 解析的集合にはどのような物があるのだろうか？

解析的集合の例

- 解析的集合にはどのような物があるのだろうか？

Theorem 15

Borel 集合は解析的であり，更に補解析的でもある．よって $\mathbf{\Delta}^1_1$ である．

解析的集合の例

- 解析的集合にはどのような物があるのだろうか？

Theorem 15

Borel 集合は解析的であり，更に補解析的でもある．よって $\mathbf{\Delta}^1_1$ である．

証明の方針

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ が開・閉集合を含み，可算和・可算共通部分について閉じる事を示せば良い．Baire 空間の基本開集合は閉集合でもあったので，

1. $\mathbf{\Sigma}^1_1$ は可算和・可算共通部分について閉じている
2. $\mathbf{\Sigma}^1_1$ は閉集合を含む

の二つを示せば十分．Borel 集合が補集合について閉じることから補解析的であることも従う．

証明

閉集合は解析的. ω 上の木 T に対し $T' := \{ (t,t) : t \in T \}$ とおけば $p[T'] = [T]$.

証明

閉集合は解析的．ω 上の木 T に対し $T' := \{ (t,t) : t \in T \}$ とおけば $p[T'] = [T]$.
各 T_n を $\omega \times \omega$ 上の木として，$A_n = p[T_n]$ とおく．

証明

閉集合は解析的． ω 上の木 T に対し $T' := \{ (t,t) : t \in T \}$ とおけば $p[T'] = [T]$.
各 T_n を $\omega \times \omega$ 上の木として，$A_n = p[T_n]$ とおく．
可算和． ここで,

$$T := \{ (s,t) : \exists n < \omega [t = n ^\frown t' \wedge (s \restriction \mathrm{lh}(t'), t') \in T_n] \}$$

とおけば， これは木で， 明らかに $p[T] = \bigcup_n p[T_n]$.

証明

閉集合は解析的．ω 上の木 T に対し $T' := \{ (t, t) : t \in T \}$ とおけば $p[T'] = [T]$.
各 T_n を $\omega \times \omega$ 上の木として，$A_n = p[T_n]$ とおく．
可算和． ここで,

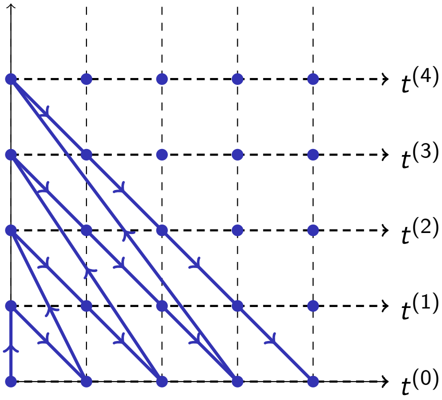
$$T := \{ (s, t) : \exists n < \omega\, [t = n ^\frown t' \wedge (s \restriction \mathrm{lh}(t'), t') \in T_n] \}$$

とおけば， これは木で，明らかに $p[T] = \bigcup_n p[T_n]$.
可算共通部分．第二引数につき単調な全単射 $e : \omega \times \omega \to \omega$ を取る． $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対し， $t^{(n)} := \langle t_{e(n,\ell)} | e(n, \ell) < \mathrm{lh}(t) \rangle$ として,

$$T := \left\{ (s, t) : \forall n < \omega\, [(s \restriction \mathrm{lh}(t^{(n)}), t^{(n)}) \in T_n] \right\}$$

とおけば， これは木で， $p[T] = \bigcap_n p[T_n]$ となる． □

e による可算個の列の統合の概念図



$\boldsymbol{\Delta}^1_1$ 集合と Borel 集合

先程の定理の「逆」も成立する：

Theorem 16

$\boldsymbol{\Delta}^1_1$-集合は *Borel* 集合である．従って $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ は *Borel* 集合全体と一致する．

これは先程の定理と，次の定理から従う：

Theorem 17 ($\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-分離原理)

任意の二つの互いに交わらない解析的集合は *Borel* 集合により分離出来る．即ち，

$$\forall A, B \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1 \, [A \cap B = \emptyset \to \exists C : \mathit{Borel}, A \subseteq C \land B \subseteq C^c]$$

証明 I

$A = p[T], B = p[S]$ とする．各 $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，

$$A^s_t := \{\, x \in A : s \subseteq x \wedge \exists y\, (t \subseteq y \wedge (x, y) \in [T])\,\}$$
$$B^s_t := \{\, x \in B : s \subseteq x \wedge \exists y\, (t \subseteq y \wedge (x, y) \in [S])\,\}$$

とおく．各 A^s_t, B^s_t はそれぞれ (s, t) の収束先に含まれているような点全体であり，特に定義から $A^\emptyset_\emptyset = A, B^\emptyset_\emptyset = B$ となっている．
また，常に

$$(s, t) \in T \Rightarrow A^s_t = \bigcup \{\, A^{s\frown n}_{t\frown m} : (s \frown n, t \frown m) \in T \,\}$$

が成立している（S, B^s_t についても同様）．以下 A, B が分離されないとして矛盾を導く（背理法）．

証明 II

まずは次を示す：

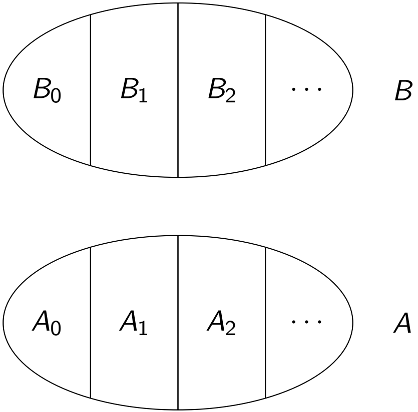
Claim 2

$A = \bigcup_{n<\omega} A_n, B = \bigcup_{k<\omega} B_k$ とする．A が *Borel* 集合で分離できないなら，A_n, B_k が分離出来ないような n, k が存在する．

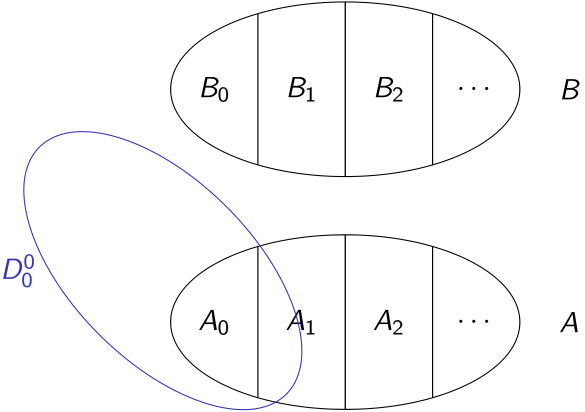
Proof.

対偶を示す．各 A_n, B_k が Borel 集合で分離出来るなら，$\bigcup_n A_n, \bigcup_k B_k$ も分離出来る事を示せばよい．そこで，D^n_k を A_n, B_k を分離する Borel 集合とする．すると，$D := \bigcup_{n<\omega} \bigcap_{k<\omega} D^n_k$ が A, B を分離する Borel 集合となる． □

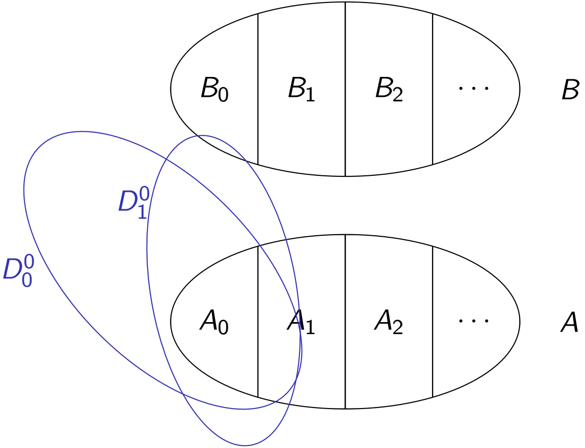
覆っているイメージ



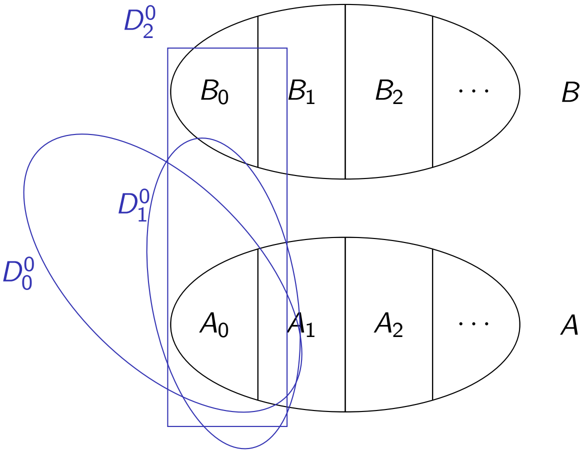
覆っているイメージ



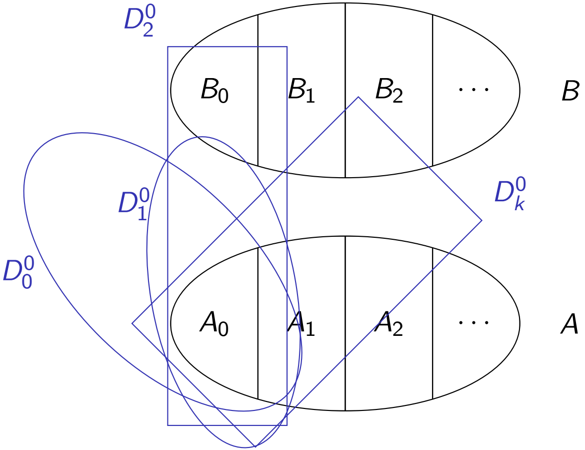
覆っているイメージ



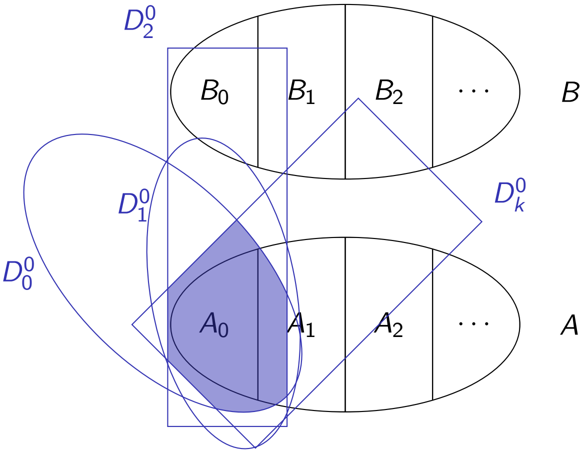
覆っているイメージ



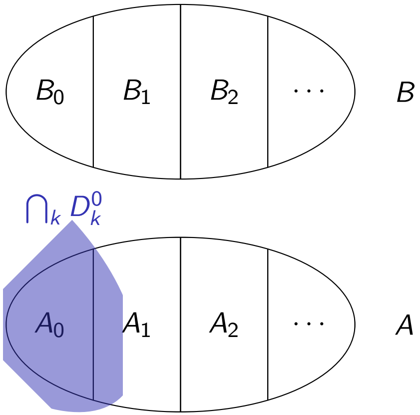
覆っているイメージ



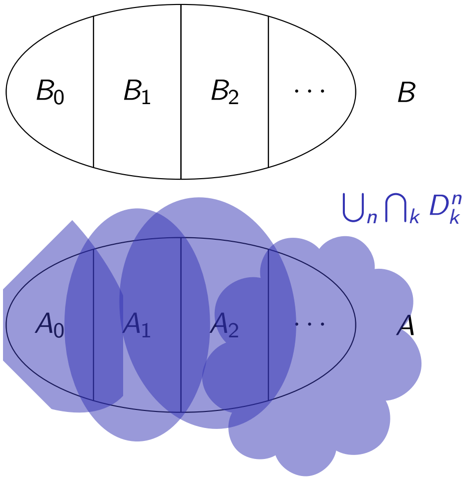
覆っているイメージ



覆っているイメージ



覆っているイメージ



証明（続き） I

ここで，$A^s_t = \bigcup_{n,k<\omega} A^{s\frown n}_{t\frown k}$, $B^s_t = \bigcup_{n,k<\omega} B^{s\frown n}_{t\frown k}$ が成立することに気をつけると，次を満たすような $x, y, u, v \in \mathcal{N}$ が取れる：

$$(x, y) \in [T] \wedge (u, v) \in [S] \wedge \forall n < \omega, [A^{x\restriction n}_{y\restriction n} \text{ と } B^{u\restriction n}_{v\restriction n} \text{は分離不能}] \ (*)$$

$n = 0$ の時は，背理法の仮定から $A = A^{\emptyset}_{\emptyset}$ と $B = B^{\emptyset}_{\emptyset}$ が分離不能であることから常に成立している．x, y, u, v の n 桁目までが定まったとすれば，先程の補題から，$A^{x\restriction n\frown k}_{y\restriction n\frown \ell}$ と $B^{u\restriction n\frown m}_{v\restriction n\frown i}$ が分離不能となるような $k, \ell, m, i < \omega$ が存在しなければならない．そこでそんな k, ℓ, m, i を取って，x, y, u, v の $(n+1)$ 桁として定めればよい．

証明（続き） II

すると，取り方から $x \in A = p[T], u \in B = p[S]$ であり，$A \cap B = \emptyset$ より $x \neq u$ である．Baire 空間は完備距離化可能空間であり，従って特に Hausdorff 空間なので，x, u の基本開近傍 $U = O(x \restriction j_x), V = O(u \restriction j_u)$ で $U \cap V = \emptyset$ となるものが取れる．そこで改めて $j := \max\{j_x, j_u\}$ とおけば，明らかに $A^{x \restriction j}_{y \restriction j} \subseteq U$ かつ $B^{u \restriction j}_{v \restriction j} \subseteq V$．よって $A^{x \restriction j}_{y \restriction j}$ と $B^{u \restriction j}_{v \restriction j}$ は Borel 集合 U により分離されることになり，(*) に反する． □

普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 I

- $\mathbf{\Delta}^1_1$ 集合は Borel 集合となることがわかった.

? $\mathbf{\Sigma}^1_1$ だが $\mathbf{\Pi}^1_1$ でないような集合は存在するのか？

$\cdots$ 次の普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合を使った対角線論法で示される：

Fact 18

$\mathcal{N}^2$ の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 B で次を満たす物が存在する：

$$\forall A \subseteq \mathcal{N}\, [A \in \mathbf{\Sigma}^1_1 \iff \exists z \in \mathcal{N}\ A = \{\, x : (x, z) \in B \,\}]$$

このような B を普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合と呼ぶ.

普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 II

⋆ この時，$A = \{ x \in \mathcal{N} : (x, x) \in B \}$ は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ だが $\mathbf{\Pi}^1_1$ ではない．

(∵) A が $\mathbf{\Pi}^1_1$ だとすると，$A^c = \{ x \in A : (x, x) \notin B \}$ は $\mathbf{\Sigma}^1_1$．すると B は普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合なので $\forall x \in \mathcal{N} [(x, x) \notin B \iff (x, z) \in B]$ を満たす $z \in \mathcal{N}$ が存在する．特に $x = z$ とおけば，$(z, z) \notin B \iff (z, z) \in B$ となり矛盾．よって A は $\mathbf{\Pi}^1_1$ ではない． □

普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の存在 I

- $\omega^k \times \omega$ 上の木の概念は $\omega \times \omega$ 上の木と同様に定義出来る.
- $p_k[T] := \{ u \in \mathcal{N}^k : \exists z \in \mathcal{N} (u \frown z \in [T]) \}$
- $\mathcal{N}^k$ の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は $p_k[T]$ の形で書ける集合と定義する.
- 普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は $\mathcal{N}^2$ の部分集合なので, $\omega^2 \times \omega$ 上の木の射影として定義したい
- そこで, 有限木を有限列でコードすることを考える.
- $e : {}^{<\omega}\omega \times {}^{<\omega}\omega \to \omega$ を, $\forall n < \omega, e(s \restriction n, t \restriction n) \leq e(s,t)$ を満たすような単射とする.
- $u \in {}^{<\omega}\omega$ が有限木のコード $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T_u :=$ $\{ (s,t) : \mathrm{lh}(s) = \mathrm{lh}(t) < \omega \wedge e(s,t) < \mathrm{lh}(u) \to u(e(s,t)) = 1 \}$ が有限木

普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の存在 II

- ここで

$$T := \left\{ (s,u,t) : \begin{matrix} u \text{ は有限木のコード} \land \\ \forall i{<}\omega\, [e(s{\restriction}i,t{\restriction}i){<}\mathrm{lh}(u) \to u(e(s{\restriction}i,t{\restriction}i)){=}1] \end{matrix} \right\}$$

  と定めれば，T は $\omega^2 \times \omega$ 上の木.
- そこで $B = p_2[T]$ と置けば，これが求めるものとなる.
  - $(x,\sigma,y) \in [T]$ とすれば，σ が $\omega \times \omega$ 上の木の witness であり，$(x,y) \in T_\sigma$ となっている.

射影階層

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ や $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の射影を取って，射影階層を定義出来る：

Definition 19

- $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N}^k) := \left\{ p_k[T] \subseteq \mathcal{N} : T \text{ は} \omega^k \times \omega \text{上の木} \right\}$

  $\mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{N}^k) := \left\{ \mathcal{N} \setminus A : A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N}^k) \right\}$
- $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{N}^k) := \left\{ \exists^{\mathcal{N}} B : B \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N}^{k+1}) \right\}$

  $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{N}^k) := \left\{ \mathcal{N} \setminus A : A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{N}^k) \right\}$
- $\mathbf{\Delta}^1_n(\mathcal{N}^k) := \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{N}^k) \cap \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N}^k)$

但し $A \subseteq \mathcal{N}^{k+1}$ に対し
$\exists^{\mathcal{N}} A = \{ (s_1, \ldots, s_k) : \exists z \in \mathcal{N} (s_1, \ldots, s_k, z) \in A \}$.

射影集合と Solovay-Shelah の結果（予告）

- 以下，これから学ぶこと．
- Solovay：κ が到達不能基数で G が $\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$-generic / V の時，$V[G]$ において順序数を用いて定義可能な実数の集合は Lebesgue 可測性，Baire の性質，完全集合性質を持つ．
  - ⇝ ここで示した「あるクラスの集合が好ましい性質を持つ」ことの拡張的な結果と見れる
- Shelah：任意の $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合が Lebesgue 可測なら，任意の実数 z について ω_1^V は $L[z]$ で到達不能基数になっている．
- ここまでの内容で，記述集合論に属する部分について上の主張の意味は理解できるようになった．

参考文献 I

- Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2002.
- Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. English. 1st ed. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, Inc., 1995. ISBN: 9781461286929.
- Kenneth Kunen. *Set Theory*. Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.
- Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2009. ISBN: 9780821848135.

参考文献 II

Ralf Schindler. *Set Theory: Exploring Independence and Truth*. Universitext. Springer International Publishing Switzerland, 2014. ISBN: 9783319067247.