実数の集合はどこまで可測になれるか？

Solovay-Shelah による Lebesgue 可測性と〈大きな無限〉の関係に関する結果について

石井大海

University of Tsukuba

2015 年 7 月 27 日

初めに

Q. 任意の実数の集合は Lebesgue 可測か？

A. NO！

Lebesgue 非可測集合の存在

Theorem (Vitali)

選択公理の下で，$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は *Lebesgue* 非可測である.

- 証明をよく分析すると，以下が本質的に使われている：

選択公理　$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の完全代表系を取るのに使う.

平行移動不変性
可算加法性
$\Big\}$ 可算個の $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ で $\mathbb{R}$ を覆って，$\mu(\mathbb{R}) = 0$ を結論するのに使う.

Lebesgue 非可測集合の存在

Theorem (Vitali)

選択公理の下で，$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は *Lebesgue* 非可測である．

- 証明をよく分析すると，以下が本質的に使われている：

選択公理　$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の完全代表系を取るのに使う．

平行移動不変性
可算加法性
} 可算個の $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ で $\mathbb{R}$ を覆って，$\mu(\mathbb{R}) = 0$ を結論するのに使う．

- いずれかの条件を外せば「適当な仮定の下で」Lebesgue 測度を任意の実数の集合に拡張出来ることが知られている．

⋆ 今回は最初の「選択公理」を弱めた場合に関する Solovay の結果について扱う．

Solovay の結果

以下，この主張の理解に必要な定義を扱う.

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，Col$(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において，
HOD$({}^{\omega}$On$)$ は「ZF + 従属選択公理 (DC) +
任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる.

Solovay の結果

以下，この主張の理解に必要な定義を扱う.

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，$\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において，$\mathrm{HOD}({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「ZF + 従属選択公理 (DC) + 任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる.

従属選択公理　選択公理の弱い形．無限下降列の存在を保証 $(\forall x\, \exists y\; y\; R\; x \Longrightarrow \exists \{\, a_n \,\}_{n<\infty}\; \forall n\; a_{n+1}\; R\; a_n)$. 点列を取れ，可算和定理を導くので，測度論や解析学を再現するには殆んど十分.

Solovay の結果

以下，この主張の理解に必要な定義を扱う.

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ による強制拡大において，
$\mathrm{HOD}({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「ZF + 従属選択公理 (DC) +
任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる.

到達不能基数

⋆ 到達不能基数は冪や極限で下から辿り着けない大きな基数

Definition

- Vにより集合全体の宇宙を表す.
- 整列集合の順序型を順序数と呼び，順序数全体のクラスをOnと書く.
- 基数：集合の濃度の同値類の代表元．選択公理の下で全ての集合は整列可能なので，ZFC では「それ未満からの全単射がない順序数」として定義される.
- ω：$\mathbb{N}$ の順序型．可算選択公理の下で最小の無限基数.
- ω_1：ω より大きな最小の基数で，最小の非可算基数.

到達不能 (cont.)

Definition

- 基数 κ に対しその冪 $2^\kappa := |\mathcal{P}(\kappa)|$.
- 基数 κ が正則 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\alpha < \kappa\, \forall f\colon \alpha \to \kappa\, \exists\gamma < \kappa\, [\sup f < \gamma]$.
  i.e. κ はそれより小さな基数の極限で表現できない.
- 基数 κ が強極限 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\lambda < \kappa\; 2^\lambda < \kappa$.
  i.e. κ は下から冪を取る操作で辿り着くことが出来ない.
- κ が到達不能基数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \kappa > \omega$ で κ は強極限かつ正則.

- κ：到達不能基数の時，$\emptyset$ から冪集合を κ 回取って得られる累積的階層 V_κ は ZFC のモデルとなる.
  - $\rightsquigarrow$ 第二不完全性定理より，存在は ZFC の内部で証明出来ない.

$\star$ 到達不能基数はこうした巨大基数の中でも最も大人しい.

Solovay の結果

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，Col$(\omega, <\kappa)$ による強制拡大において，
HOD$({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「ZF + 従属選択公理 (DC) +
任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる.

Solovay の結果

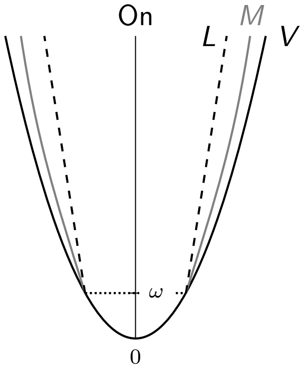
Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，$\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において，
HOD($^\omega$On) は「ZF + 従属選択公理 (DC) +
任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる.

内部モデル

内部モデル 定義可能な推移的クラス ($x \in y \in M \implies x \in M$) で，全ての順序数を含む ZF のモデル.

- 典型例：Gödel の構成可能宇宙 L
  $\cdots$ 定義可能な集合全体．最小モデル.
  - 自動的に選択公理が成立.
- ⋆ 遺伝的順序数列定義可能集合のクラス HOD($^{\omega}$On)
  - 順序数の可算列を使って定義出来る集合で出来ている集合の全体．外側で DC が成り立つなら，DC の内部モデルとなる.
  - ⋆ HOD($^{\omega}$On) は外側の宇宙と同じ実数を持つ！



Solovay の結果

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，Col$(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において，HOD$({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「ZF + 従属選択公理 (DC) + 任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる.

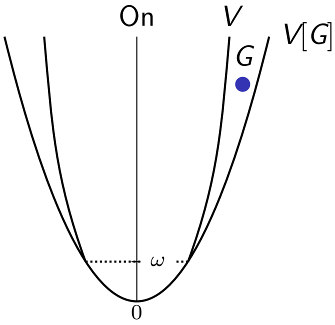
Solovay の結果

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ による強制拡大において，
$\mathrm{HOD}({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「ZF + 従属選択公理 (DC) +
任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測 (LM)」の内部モデルとなる．

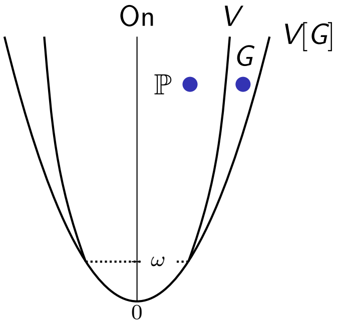
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.



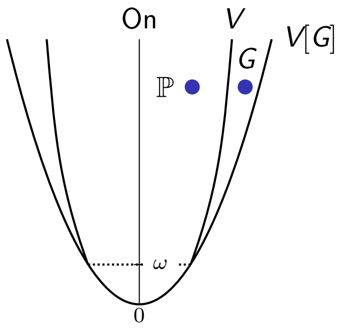
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際：G の近似条件の成す擬順序集合 $\mathbb{P}$ を考える.



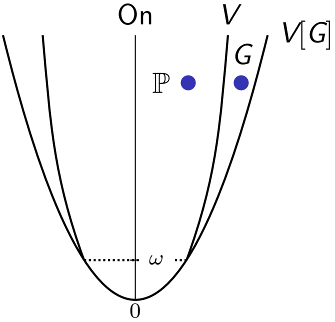
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際：G の近似条件の成す擬順序集合 $\mathbb{P}$ を考える.
- 近似 $p \in \mathbb{P}$ に対し V に G を加えた宇宙 $V[G]$ で成り立つ命題を調べられる（強制定理）.



強制拡大

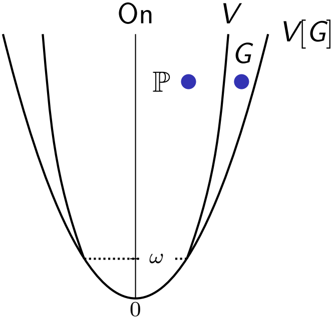
- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際：G の近似条件の成す擬順序集合 $\mathbb{P}$ を考える.
- 近似 $p \in \mathbb{P}$ に対し V に G を加えた宇宙 $V[G]$ で成り立つ命題を調べられる（強制定理）.
    - $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ ……「$p \in \mathbb{P}$ が G の近似なら $V[G]$ で φ が成り立つ」.



- $V[G]$ の元 x に対応する $\mathbb{P}$-name $\dot{x}$ を V の中で考えられる.
「$\mathbb{P}$-値所属確率」つき集合.

強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際：G の近似条件の成す擬順序集合 $\mathbb{P}$ を考える.
- 近似 $p \in \mathbb{P}$ に対し V に G を加えた宇宙 $V[G]$ で成り立つ命題を調べられる（強制定理）.
  - $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ ……「$p \in \mathbb{P}$ が G の近似なら $V[G]$ で φ が成り立つ」.

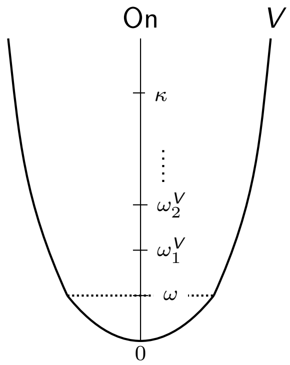


- $V[G]$ の元 x に対応する $\mathbb{P}$-name $\dot{x}$ を V の中で考えられる.
  「$\mathbb{P}$-値所属確率」つき集合.

⋆ $V[G]$ から見れば V は内部モデルになる.

Levy 崩壊 $\mathsf{Col}(\omega, < \kappa)$

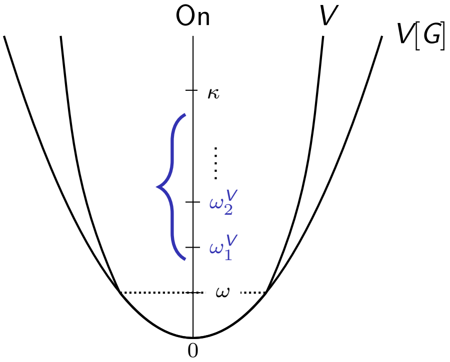
$\star$ $\mathsf{Col}(\omega, < \kappa)$: Levy 崩壊. κ を ω_1 に潰す強制法.



- V では ω と κ の間には無数の基数が存在する.

Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$

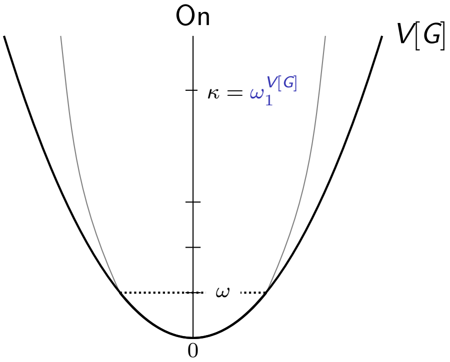
$\star$ $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$: Levy 崩壊. κ を ω_1 に潰す強制法.



- V では ω と κ の間には無数の基数が存在する.
- 各 $\omega < \lambda < \kappa$ に対し, ω から λ への全射を付け加えて可算順序数にする.

Levy 崩壊 Col$(\omega, < \kappa)$

$\star$ Col$(\omega, < \kappa)$: Levy 崩壊．κ を ω_1 に潰す強制法．



- V では ω と κ の間には無数の基数が存在する．
- 各 $\omega < \lambda < \kappa$ に対し，ω から λ への全射を付け加えて可算順序数にする．
- $V[G]$ では ω と κ の間の基数は死滅し，$V[G]$ では κ が ω_1 になる．

※ 潰された基数は順序数としては生き残ることに注意！

読み下し分

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数，$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ による強制拡大において，
$\mathrm{HOD}({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「$\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$」の内部モデルとなる．

読み下し分

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数として κ を ω_1 に潰すと，HOD$({}^{\omega}\mathrm{On})$ は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる.

読み下し分

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数として κ を ω_1 に潰すと，HOD($^\omega$On) の中では解析学・測度論を展開するのに十分な集合論が成り立って，任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測になる．

- （到達不能基数の無矛盾性の仮定の下で）選択公理を制限すれば「任意の実数の集合」が可測になれることがわかった．

読み下し分

Theorem (Solovay 1970)

κ を到達不能基数として κ を ω_1 に潰すと，HOD$({}^{\omega}\mathrm{On})$ の中では解析学・測度論を展開するのに十分な集合論が成り立って，任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測になる．

- （到達不能基数の無矛盾性の仮定の下で）選択公理を制限すれば「任意の実数の集合」が可測になれることがわかった．

? 選択公理下でどこまで可測になれるだろうか？

実数の集合はどこまで可測になれるか？

Definition

以下の何れかの $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ に属する集合を射影的集合と呼ぶ.

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_1 := \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^k \;\middle|\; \begin{array}{c} A\text{: 解析的集合} \\ \text{(Borel 集合の連続像)} \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{\Pi}^1_n := \neg\,\boldsymbol{\Sigma}^1_n, \qquad \boldsymbol{\Delta}^1_n := \boldsymbol{\Sigma}^1_n \cap \boldsymbol{\Pi}^1_n$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1} := \left\{ \pi_k[B] \;\middle|\; B \in \boldsymbol{\Pi}^1_n \cap \mathbb{R}^{k+1} \right\}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boldsymbol{\Sigma}^1_n \arrow[dr, hook, "\neq"] & \\ \boldsymbol{\Delta}^1_n \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \boldsymbol{\Delta}^1_{n+1} \\ & \boldsymbol{\Pi}^1_n \arrow[ur, hook, "\neq"'] & \end{tikzcd}$$

- $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ は Borel 集合の全体と一致する.

⋆ $\boldsymbol{\Sigma}^1_1, \boldsymbol{\Pi}^1_1$ の可測性は ZF + DC の下で示せる.

射影的集合の可測性

? それより上の階層はどうか？

- L の中では「非可測な $\mathbf{\Delta}^1_2$-集合の存在」が示せる.
  $\rightsquigarrow$「非可測な射影的集合の存在」は ZFC と無矛盾.

⋆ 他方，$(\mathrm{HOD}({}^{\omega}\mathrm{On}))^{V[G]}$ は $V[G]$ と同じ実数を持つので，$V[G]$ の射影集合を全て含み，「実数の集合 A が可測」の概念も $V[G]$ と一致する.

$\rightsquigarrow$ $V[G]$ で任意の射影的集合は可測．到達不能基数の無矛盾性を仮定すれば「任意の射影的集合は可測」は ZFC と無矛盾.

? 到達不能基数の仮定は落とせないのか？

射影階層の可測性と到達不能基数

Theorem (Martin-Solovay 1970)

ZFC $+ 2^\omega > \omega_1 +$ MA の下で任意の $\mathbf{\Sigma}^1_2$-集合は可測.

- "ZFC $+ 2^\omega > \omega_1 +$ MA" は ZFC と無矛盾性等価.

⋆ $\mathbf{\Sigma}^1_2$-集合の可測性には到達不能基数は不要！

Theorem (Shelah 1984)

「ZF + DC + 任意の$\mathbf{\Sigma}^1_3$-集合が可測」ならば，V の ω_1 は L で到達不能基数になっている.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 以上の射影的集合の可測性には到達不能基数が必要！

まとめと一般化

- 到達不能基数を壊すと任意の「順序数列で定義可能な」実数の集合が可測になり，そんな集合全体を集めてくると，その中で解析学を十分展開出来て任意の実数の集合が可測なモデルになっている．
- 同様に「任意の射影的集合が可測」の独立性が言える．

⋆ Khomskii はこの結果を可測性以外の正則性に拡張する一般的な枠組みを与えている．
  - 具体例：Baire の性質，Ramsey の性質

- 後期は Shelah の示した逆向きの結果を詳しく分析する．

参考文献 I

- Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2002.

- Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.

- Yurii Khomskii. "Regularity Properties and Definability in the Real Number Continuum. Idealized forcing, polarized partitions, Hausdorff gaps and mad families in the projective hierarchy". English. PhD thesis. Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, 2012.

参考文献 II

D.A. Martin and R.M. Solovay. “Internal cohen extensions”. In: *Annals of Mathematical Logic* 2.2 (1970), pp. 143–178. ISSN: 0003-4843. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0003-4843(70)90009-4. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003484370900094.

Ralf Schindler. *Set Theory: Exploring Independence and Truth*. Universitext. Springer International Publishing Switzerland, 2014. ISBN: 978-3-319-06724-7.

Saharon Shelah. “Can You Take Solovay’s Inaccessible Away?” In: *Israel Journal of Mathematics* 48.1 (1984).

参考文献 III

- Robert M. Solovay. "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable". In: *The Annals of Mathematics*. 2nd ser. 92.1 (July 1970), pp. 1–56.
- 藤田博司. ルベーグ可測性にかんするソロヴェイのモデル. 2007 年数学基礎論サマースクール講義資料. 2007. URL: http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/preprints/lss07_fujita_release.pdf.
- 渕野昌. ルベーク測度の拡張の可能性について. 2006. URL: http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/papers/shizuoka-ws06-talk.pdf.

以下，発表では省略した証明の概略

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{\, x \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in M := V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．（$V[G \restriction \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙）
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{\, x \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in M := V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．（$V[G \restriction \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙）
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

$\star$ 以下，各段階の「気持ち」を説明する

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{\, x \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in M := V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．（$V[G \restriction \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙）
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

$\star$ $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ で潰す

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{ x \mid \varphi(x, \sigma) \}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．（$V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙）
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

$\star$ $\mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})$ の定義

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{ x \mid \varphi(x, \sigma) \}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in M := V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．（$V[G \restriction \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙）
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

$\star$ κ の到達不能性より σ を指す名称が十分小さく取れる

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{\, x \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in M := V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．（$V[G \restriction \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙）
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

4. 殆んど至る所「ランダム」

Definition

- M を推移的モデルとする．実数 x が M 上ランダム $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B \in M\,[B : M$ の零 Borel 集合 $\implies x \notin B^*]$.

但し，B^* は「M での B と "全く同じ作り方をした" $V[G]$ の Borel 集合」（cf. Borel code, univrsally Baire sets）.

- 「殆んど至る所ランダム」$\Leftrightarrow$「$\mathfrak{N}$ を $M := V[G \restriction \lambda]$ に属する零 Borel 集合の全体とした時，$\bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N^*$ が $V[G]$ で零集合」
- M に属するような Borel 集合全体は高々 $(2^{\aleph_0})^M$ 個.
- λ 未満の基数を潰した M でも κ は到達不能で $(2^{\aleph_0})^M < \kappa$.

$\rightsquigarrow$ $V[G]$ から見ると M に属する Borel 集合は可算個しかない.

$\rightsquigarrow$ 可算加法性から，$V[G]$ で $\bigcup \mathfrak{N}^*$ は零集合.

証明の構造

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{ x \mid \varphi(x, \sigma) \}$ と書けているとする．
- ✓ この時，$\sigma \in V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．

5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

証明の構造

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{\, x \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$ と書けているとする．
- ✓ この時，$\sigma \in V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．

5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

5. 定義論理式 φ でランダム実数を Borel で捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法（ランダム強制法 $\mathbb{MB}$）で付け加わる実数と一対一に対応.

5. 定義論理式 φ でランダム実数を Borel で捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法（ランダム強制法 $\mathbb{MB}$）で付け加わる実数と一対一に対応.
- $\mathbb{MB}^M$ は十分小さいので，$\mathbb{MB}^M$ の後に再び $\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
  （$\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的）

5. 定義論理式 φ でランダム実数を Borel で捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法（ランダム強制法 $\mathbb{MB}$）で付け加わる実数と一対一に対応.
- $\mathbb{MB}^M$ は十分小さいので，$\mathbb{MB}^M$ の後に再び $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
（$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的）
- $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ の組合せ論的性質により，$V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.

5. 定義論理式 φ でランダム実数を Borel で捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法（ランダム強制法 $\mathbb{MB}$）で付け加わる実数と一対一に対応.
- $\mathbb{MB}^M$ は十分小さいので，$\mathbb{MB}^M$ の後に再び $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
  （$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的）
- $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ の組合せ論的性質により，$V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.
- $\mathbb{MB}$ 拡大の「ランダム実数」を指す $\mathbb{MB}^M$-名称 $\dot{r}$ が定義可能

5. 定義論理式 φ でランダム実数を Borel で捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法（ランダム強制法 $\mathbb{MB}$）で付け加わる実数と一対一に対応.
- $\mathbb{MB}^M$ は十分小さいので，$\mathbb{MB}^M$ の後に再び $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
（$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的）
- $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ の組合せ論的性質により，$V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.
- $\mathbb{MB}$ 拡大の「ランダム実数」を指す $\mathbb{MB}^M$-名称 $\dot{r}$ が定義可能

$$\rightsquigarrow \quad x \in A \iff \Vdash^{M[x]}_{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)} \varphi(\dot{r}, \check{\sigma})$$

$$\iff \exists D \in M \left[D \Vdash^{M}_{\mathbb{MB}} \text{“}\emptyset \Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)} \varphi(\dot{r}, \check{\sigma})\text{''} \right]$$

5. 定義論理式 φ でランダム実数を Borel で捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法（ランダム強制法 $\mathbb{MB}$）で付け加わる実数と一対一に対応.
- $\mathbb{MB}^M$ は十分小さいので，$\mathbb{MB}^M$ の後に再び $\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
（$\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的）
- $\mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ の組合せ論的性質により，$V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.
- $\mathbb{MB}$ 拡大の「ランダム実数」を指す $\mathbb{MB}^M$-名称 $\dot{r}$ が定義可能

$$\rightsquigarrow \quad x \in A \iff \Vdash^{M[x]}_{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)} \varphi(\dot{r}, \check{\sigma})$$

$$\iff \exists D \in M \left[D \Vdash^{M}_{\mathbb{MB}} \text{“}\emptyset \Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)} \varphi(\dot{r}, \check{\sigma})\text{”} \right]$$

$\rightsquigarrow$ $B := \bigcup \left\{ D^* \,\middle|\, D \in \mathbb{MB}^M, D \Vdash_{\mathbb{MB}} \text{“}\emptyset \Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)} \varphi(\dot{r}, \check{s})\text{”} \right\}$ が求める Borel 集合（可算和なので Borel）.

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{ x \mid \varphi(x, \sigma) \}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．

証明の構造

1. 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
2. $A \in \mathrm{OD}({}^{\omega}\mathrm{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする．論理式 φ と $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On}$ により $A = \{\, x \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$ と書けているとする．
3. この時，$\sigma \in V[G \restriction \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる．
4. すると実数は殆んど至る所 $V[G \restriction \lambda]$ 上「ランダム」になる．
5. 他方，φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る．
6. Borel 集合は可測なので，以上から A は可測集合と測度零の差しかなく，従って可測となる．