

Lebesgue 可測性に関する Solovay の定理と実数の集合の正則性¹

石井大海

筑波大学数理物質科学研究科
数学専攻博士前期課程二年

Friday 27th November
数学基礎論若手の会 2015

¹This slide is available on
<http://konn-san.com/math/2015-solovay-regular.pdf>

Table of Contents

- ① 自己紹介と背景
- ② Solovay の定理
- ③ Solovay の定理の証明
- ④ Khomskii による一般化と今後の課題

自己紹介

- 石井大海 (いしい・ひろみ)
 - 筑波大学数理物質科学研究科数学専攻博士前期課程二年
 - 専門：公理的集合論 (塩谷研)
- 発表内容：修士論文の一部である実数の集合の正則性と拡張 Solovay の定理について.

背景：測度の問題

- Lebesgue 測度** 実数の集合を図形と見做した時に長さに当る量.
測度の問題 任意の実数の集合に対し、測度が定義出来る
(可測) か？

Theorem 1 (Vitali)

\mathbb{R}/\mathbb{Q} の完全代表系は *Lebesgue* 非可測.

- 証明をよく分析すると、以下が本質的に使われている：

選択公理 \mathbb{R}/\mathbb{Q} の完全代表系を取るのに使う.

平行移動不変性 } 可算個の \mathbb{R}/\mathbb{Q} で \mathbb{R} を覆って,
可算加法性 } $\mu(\mathbb{R}) = 0$ を結論するのに使う.

↪ 本講演では**選択公理の使用**について詳しく見ていく.

選択公理

- 選択公理：非空集合の族の直積は空でない。
 - ↪ 可算和定理（可算集合の可算和は可算）など、解析学・測度論の展開に不可欠な定理を導く。
 - ★ 実際には、従属選択公理（DC）があれば大半は十分！

$$\forall R [\forall x \exists y (x R y) \implies \exists \langle x_n \mid n < \omega \rangle (x_n R x_{n+1})]$$

「可算上昇（下降）列が取れそうな局面では必ずとれる」

- 一方、 \mathbb{R}/\mathbb{Q} の完全代表系を取るには連続体濃度の族に対するフルパワーの選択公理が必要になる。
- ⑦ 選択公理を従属選択公理に弱めれば、任意の集合を可測に出来るのでは？
 - ↪ この疑問に答えたのが Solovay-Shelah の定理！

Solovay-Shelah の定理

Theorem 2 (Solovay 1970 [5])

到達不能基数の存在が無矛盾なら、
 $ZF + DC +$ “任意の実数の集合が可測 (LM)” も無矛盾.

Theorem 3 (Shelah 1984 [4])

$ZF + DC + LM$ が無矛盾なら、到達不能基数の存在も無矛盾.

- 到達不能基数：存在を仮定すると ZFC の無矛盾性が証明出来るくらい大きな基数. 特に、第二不完全性定理より ZFC でその存在を証明出来ない. (詳細後述)
- ★ 特に、以下では Solovay の定理について詳しくみていく.

Table of Contents

- ① 自己紹介と背景
- ② Solovay の定理
- ③ Solovay の定理の証明
- ④ Khomskii による一般化と今後の課題

Solovay の定理

Solovay の定理の正確なステートメントは以下の通り：

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数とすると、 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において、 HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる。

★ 以下、この主張を理解するのに必要な知識を紹介。

Solovay の定理

Solovay の定理の正確なステートメントは以下の通り：

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数とすると、 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において、 HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる。

★ 以下、この主張を理解するのに必要な知識を紹介。

到達不能基数

★ 到達不能基数は冪や極限で下から辿り着けない大きな基数

Definition 3

- V により集合全体の宇宙を表す.
- 整列集合の順序型を順序数と呼び, 順序数全体のクラスを On と書く.
- 基数: 集合の濃度の同値類の代表元. 選択公理の下で全ての集合は整列可能なので, ZFC では「それ未満からの全単射がない順序数」として定義される.
- ω : \mathbb{N} の順序型. 可算選択公理の下で最小の無限基数.
- ω_1 : ω より大きな最小の基数で, 最小の非可算基数.

到達不能 (cont.)

Definition 4

- 基数 κ に対しその**冪** $2^\kappa := |\mathcal{P}(\kappa)|$.
- 基数 κ が**正則** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \alpha < \kappa \forall f: \alpha \rightarrow \kappa \exists \gamma < \kappa [\sup f < \gamma]$.
i.e. κ はそれより小さな基数の極限で表現できない.
- 基数 κ が**強極限** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \lambda < \kappa 2^\lambda < \kappa$.
i.e. κ は下から冪を取る操作で辿り着くことが出来ない.
- κ が**到達不能基数** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \kappa > \omega$ で κ は強極限かつ正則.
- κ : 到達不能基数の時, \emptyset から冪集合を κ 回取って得られる累積的階層 V_κ は ZFC のモデルとなる.
↪ 第二不完全性定理より, 存在は ZFC の内部で証明出来ない.
- ★ 到達不能基数はこうした**巨大基数**の中でも最も大人しい.

Solovay の結果

Solovay の定理の正確なステートメントは以下の通り：

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数とすると、 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において、 HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる。

★ 以下、この主張を理解するのに必要な知識を紹介。

Solovay の結果

Solovay の定理の正確なステートメントは以下の通り：

Theorem 2 (Solovay 1970)

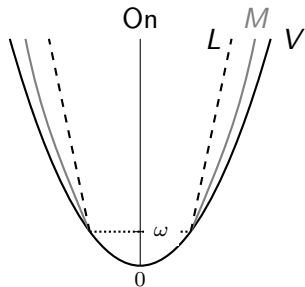
κ を到達不能基数とすると、 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において、 HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる。

★ 以下、この主張を理解するのに必要な知識を紹介。

内部モデル

内部モデル 定義可能な推移的クラス ($x \in y \in M \implies x \in M$)
で、全ての順序数を含む ZF のモデル.

- 典型例：Gödel の**構成可能宇宙** L ... 定義可能な集合全体、
最小モデル.
- 内部モデルは**集合論における相対無
矛盾性証明**の道具の一つ.
- 内部モデル M が集合論の公理系 Γ
の下で**公理系 Δ の内部モデル** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$
各公理 $\varphi \in \Delta$ に対し、 φ に現れる量
化子を全て M に制限した**相対化**が、
公理系 Γ の下で個別に証明出来る.



❗ 内部モデルは**メタ定義**であることに注意.

HOD^ω : 遺伝的順序集合列定義可能宇宙

- Solovay の定理で主役となるのは、**遺伝的順序集合列定義可能宇宙 HOD^ω !**
- A が**順序数列定義可能** ($A \in OD^\omega$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 論理式 $\varphi(x, y)$ と、順序数列の可算列 $\sigma \in {}^\omega On$ があって、 $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$.
 - 見掛け上、 V 上の真理述語を用いていて定義不能に見える。本当に内部モデル？
 - ★ **Levy の反映定理** : 論理式 φ に対し、 $V \models \varphi \iff V_\alpha \models \varphi$ となる $\alpha \in On$ が存在する (**\times タ定理**)。
 - \rightsquigarrow これを用いれば範囲を適当な V_α に制限すれば定義可能 !
- A が**遺伝的順序数列定義可能** ($A \in HOD^\omega$)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{trcl}(\{A\}) \subseteq OD^\omega$, i.e. A は OD^ω の元だけで構成。
- ★ HOD^ω は外側の宇宙と同じ実数を持つ !

Solovay の結果

Solovay の定理の正確なステートメントは以下の通り：

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数とすると、 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において、 HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる。

★ 以下、この主張を理解するのに必要な知識を紹介。

Solovay の結果

Solovay の定理の正確なステートメントは以下の通り：

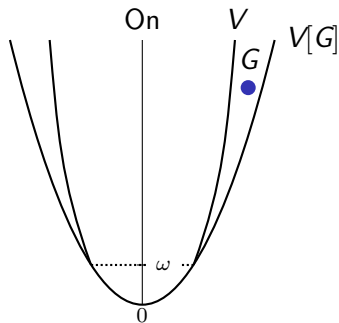
Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数とすると、 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において、 HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる。

★ 以下、この主張を理解するのに必要な知識を紹介。

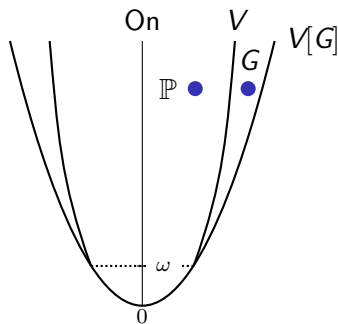
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.



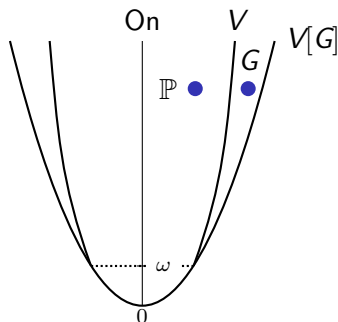
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に，外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際： G の近似条件の成す擬順序集合 \mathbb{P} を考える.



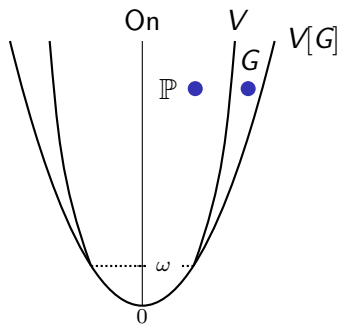
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に、外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際： G の近似条件の成す擬順序集合 \mathbb{P} を考える.
- 近似 $p \in \mathbb{P}$ に対し V に G を加えた宇宙 $V[G]$ で成り立つ命題を調べられる (強制定理).



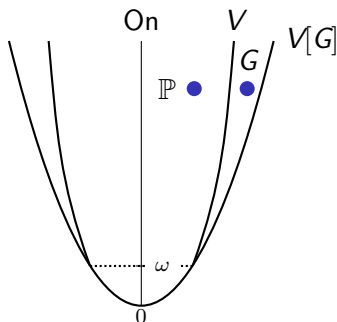
強制拡大

- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に、外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際： G の近似条件の成す擬順序集合 \mathbb{P} を考える.
- 近似 $p \in \mathbb{P}$ に対し V に G を加えた宇宙 $V[G]$ で成り立つ命題を調べられる (強制定理).
 - $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \dots\dots$ 「 $p \in \mathbb{P}$ が G の近似なら $V[G]$ で φ が成り立つ」.
- $V[G]$ の元 x に対応する \mathbb{P} -name \dot{x} を V の中で考えられる. 「 \mathbb{P} -値所属確率」つき集合.



強制拡大

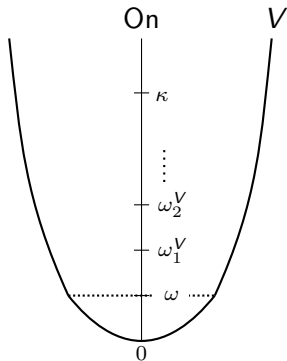
- 強制拡大：直感的には集合の宇宙 V に、外から理想的な元 G を追加した最小の宇宙 $V[G]$.
- 実際： G の近似条件の成す擬順序集合 \mathbb{P} を考える.
- 近似 $p \in \mathbb{P}$ に対し V に G を加えた宇宙 $V[G]$ で成り立つ命題を調べられる (強制定理).
 - $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \dots\dots$ 「 $p \in \mathbb{P}$ が G の近似なら $V[G]$ で φ が成り立つ」.
- $V[G]$ の元 x に対応する \mathbb{P} -name \dot{x} を V の中で考えられる. 「 \mathbb{P} -値所属確率」つき集合.
- ★ $V[G]$ から見れば V は内部モデルになる.



Levy 崩壊 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$

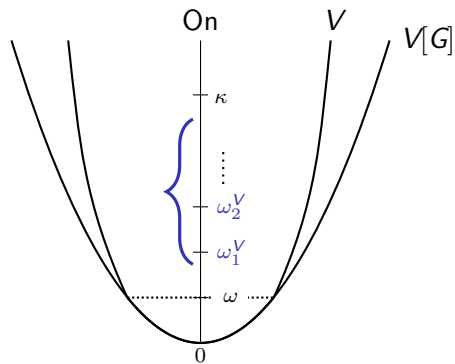
★ $\text{Col}(\omega, < \kappa)$: Levy 崩壊. κ を ω_1 に潰す強制法.

- V では ω と κ の間には無数の基数が存在する.



Levy 崩壊 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$

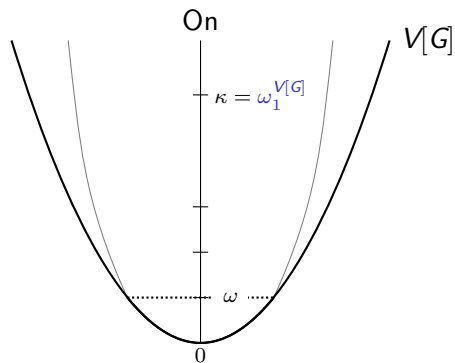
★ $\text{Col}(\omega, < \kappa)$: Levy 崩壊. κ を ω_1 に潰す強制法.



- V では ω と κ の間には無数の基数が存在する.
- 各 $\omega < \lambda < \kappa$ に対し, ω から λ への全射を付け加えて可算順序数にする.

Levy 崩壊 $\text{Col}(\omega, < \kappa)$

★ $\text{Col}(\omega, < \kappa)$: Levy 崩壊. κ を ω_1 に潰す強制法.



- V では ω と κ の間には無数の基数が存在する.
 - 各 $\omega < \lambda < \kappa$ に対し, ω から λ への全射を付け加えて可算順序数にする.
 - $V[G]$ では ω と κ の間の基数は死滅し, $V[G]$ では κ が ω_1 になる.
- ※ 潰された基数は順序数としては生き残ることに注意!

読み下し分

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数とすると, $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ による強制拡大において, HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる.

読み下し分

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数として κ を ω_1 に潰すと, HOD^ω は「ZF + DC + LM」の内部モデルとなる.

読み下し分

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数として κ を ω_1 に潰すと, HOD^ω の中では解析学・測度論を展開するのに十分な集合論が成り立って, 任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測になる.

- (到達不能基数の無矛盾性の仮定の下で) 選択公理を制限すれば「任意の実数の集合」が可測になれることがわかった.
- 今回は立ち入らないが, Shelah の結果はこの逆が成り立つことを示した. (Solovay は当初, 到達不能基数は落とせると予想していた)

読み下し分

Theorem 2 (Solovay 1970)

κ を到達不能基数として κ を ω_1 に潰すと, HOD^ω の中では解析学・測度論を展開するのに十分な集合論が成り立って, 任意の実数の集合が *Lebesgue* 可測になる.

- (到達不能基数の無矛盾性の仮定の下で) 選択公理を制限すれば「任意の実数の集合」が可測になれることがわかった.
- 今回は立ち入らないが, Shelah の結果はこの逆が成り立つことを示した. (Solovay は当初, 到達不能基数は落とせると予想していた)
- ★ 以下, $V[G]$ の HOD^ω を *Solovay のモデル* と呼ぶ.

Table of Contents

- ① 自己紹介と背景
- ② Solovay の定理
- ③ Solovay の定理の証明
- ④ Khomskii による一般化と今後の課題

Solovay の定理証明の概略

- ① 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ② $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ③ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ④ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

Solovay の定理証明の概略

- ① 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ② $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ③ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ④ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

★ 以下, 各段階を詳しく説明する

Solovay の定理証明の概略

- ① 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ② $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ③ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ④ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

★ $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ で潰す

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ② $A \in \text{HOD}(\omega_1 \text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega_1 \text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ③ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ④ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

★ $\text{HOD}(\omega_1 \text{On})$ の定義

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ③ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ④ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

★ κ の到達不能性より σ を指す名称が十分小さく取れる

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ✓ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ④ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

4. 殆んど至る所「ランダム」 I

Definition 4

- M を推移的モデルとする. 実数 x が M 上ランダム
 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \forall B \in M [B : M \text{ の零 Borel 集合} \implies x \notin B^*].$
- B^* は M での B と同じ作り方をした $V[G]$ の Borel 集合
... 「 k 番目の基本開集合 U_k 」「可算和」「補集合を取る」といった「レシピ」を実数でコードすればよい. 例:

$$c(0) = 0 \iff B_c = U_{c(1)}, \quad c(0) = 1 \iff B_c = {}^\omega\omega \setminus B_c$$

$$c(0) = 2 \iff B_c = \bigcup_{n < \omega} B_{(c)_n}$$

- ここで, $c \in {}^\omega\omega$ に対し $c'(k) = c(k+1)$, $(c)_n(k) = c(\langle n, k \rangle)$.
- ここ解釈が「ちゃんと止まる」ものが Borel コード.

4. 殆んど至る所「ランダム」 II

以上を踏まえると次のようにしてわかる：

- 「殆んど至る所ランダム」 \Leftrightarrow 「 \mathfrak{N} を $M := V[G \upharpoonright \lambda]$ に属する零 Borel 集合の全体とした時, $\bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N^*$ が $V[G]$ で零集合」
- M に属するような Borel 集合全体は高々 $(2^{\aleph_0})^M$ 個.
- λ 未満の基数を潰した M でも κ は到達不能で $(2^{\aleph_0})^M < \kappa$.
- ↪ $V[G]$ から見ると M に属する Borel 集合は可算個しかない.
- ↪ 可算加法性から, $V[G]$ で $\bigcup \mathfrak{N}^*$ は零集合.

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega_1 \text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega_1 \text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ✓ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ✓ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ⑤ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

Borel 集合でランダム実数を捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法 (ランダム強制法 MIB) で付け加わる実数と一対一に対応.

Borel 集合でランダム実数を捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法 (ランダム強制法 MB) で付け加わる実数と一対一に対応.
- MB^M は十分小さいので, MB^M の後に再び $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
($\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的)

Borel 集合でランダム実数を捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法 (ランダム強制法 MB) で付け加わる実数と一対一に対応.
- MB^M は十分小さいので, MB^M の後に再び $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
($\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的)
- $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の組合せ論的性質により, $V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.

Borel 集合でランダム実数を捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法 (ランダム強制法 MIB) で付け加わる実数と一対一に対応.
- MIB^M は十分小さいので, MIB^M の後に再び $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
($\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 ${}^{<\omega}\mu$ のある種の普遍性が本質的)
- $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の組合せ論的性質により, $V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.
- MIB 拡大の「ランダム実数」を指す MIB^M -名称 i が定義可能

Borel 集合でランダム実数を捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法 (ランダム強制法 MIB) で付け加わる実数と一対一に対応.
- MIB^M は十分小さいので, MIB^M の後に再び $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
 ($\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 $<^\omega \mu$ のある種の普遍性が本質的)
- $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の組合せ論的性質により, $V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.
- MIB 拡大の「ランダム実数」を指す MIB^M -名称 \dot{r} が定義可能

$$\rightsquigarrow x \in A \iff \Vdash_{\text{Col}(\omega, < \kappa)}^{M[x]} \varphi(\dot{r}, \check{\sigma})$$

$$\iff \exists D \in M \left[D \Vdash_{\text{MIB}}^M \text{“} \emptyset \Vdash_{\text{Col}(\omega, < \kappa)} \varphi(\dot{r}, \check{\sigma}) \text{”} \right]$$

Borel 集合でランダム実数を捕まえる

- ランダム実数は測度正 Borel 集合の成す擬順序での強制法 (ランダム強制法 MIB) で付け加わる実数と一対一に対応.
 - MIB^M は十分小さいので, MIB^M の後に再び $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ で拡大して $V[G]$ に辿り着ける.
 ($\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の直積成分 $<^\omega \mu$ のある種の普遍性が本質的)
 - $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ の組合せ論的性質により, $V[G]$ における閉論理式の真偽は近似 p に依らず定まる.
 - MIB 拡大の「ランダム実数」を指す MIB^M -名称 i が定義可能
- $\rightsquigarrow x \in A \iff \Vdash_{\text{Col}(\omega, < \kappa)}^{M[x]} \varphi(\dot{i}, \dot{\sigma})$
 $\iff \exists D \in M \left[D \Vdash_{\text{MIB}}^M \text{“} \emptyset \Vdash_{\text{Col}(\omega, < \kappa)} \varphi(\dot{i}, \dot{\sigma}) \text{”} \right]$
- $\rightsquigarrow B := \bigcup \left\{ D^* \mid D \in \text{MIB}^M, D \Vdash_{\text{MIB}} \text{“} \emptyset \Vdash_{\text{Col}(\omega, < \kappa)} \varphi(\dot{i}, \dot{s}) \text{”} \right\}$ が
 求める Borel 集合 (可算和なので Borel).

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega_1 \text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega_1 \text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ✓ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ✓ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega_1 \text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega_1 \text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ✓ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ✓ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ⑥ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

Solovay の定理証明の概略

- ✓ 到達不能基数 κ を ω_1 に潰す
- ✓ $A \in \text{HOD}(\omega\text{On})^{V[G]}$ を実数の集合とする. 論理式 φ と $\sigma \in \omega\text{On}$ により $A = \{x \mid \varphi(x, \sigma)\}$ と書けているとする.
- ✓ この時, $\sigma \in M := V[G \upharpoonright \lambda]$ となる $\lambda < \kappa$ が取れる.
($V[G \upharpoonright \lambda]$ は λ 未満の基数を全て潰した「途中」の宇宙)
- ✓ すると実数は殆んど至る所 $V[G \upharpoonright \lambda]$ 上「ランダム」になる.
- ✓ 他方, φ, σ を使って A に属する M 上のランダム実数だけからなる Borel 集合 B が定義出来る.
- ✓ Borel 集合は可測なので, 以上から A は可測集合と測度零の差しかなく, 従って可測となる.

Table of Contents

- ① 自己紹介と背景
- ② Solovay の定理
- ③ Solovay の定理の証明
- ④ Khomskii による一般化と今後の課題

- Solovay の原論文では、他にも **Baire の性質と完全集合性質** についても同様な結果が示されていた。
- ★ 特に、Baire の性質についての証明は可測性と全く同様にして出来る。
- ❓ 両者を統一的に記述することは出来ないか？
- ↪ Khomskii [2] による、イデアルに付随した **正則性** !

Definition 5

- 次が成り立つ時、 $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ は **σ -イデアル** という：
 - ① $A \in I, B \subseteq A \implies B \in I,$
 - ② $\forall \{A_n \in I \mid n < \omega\} \cup_{n < \omega} A_n \in I$
- $I^+ := \{B \in \mathcal{B} \mid B \notin I\}$. 但し、 \mathcal{B} は Borel 集合族.

正則性

Definition 6 (Khomsii 2012)

$A \subseteq \mathbb{R}$ が I -正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall B \in \mathcal{B} \setminus I \exists C \in \mathcal{B} \setminus I [C \setminus B \in I \wedge (C \subseteq A \vee C \cap A = \emptyset)].$$

- ★ どんな I -正集合も、縮めれば正集合のまま A に含まれるか、交わらないようにできる.

正則性

Definition 6 (Khomsii 2012)

$A \subseteq \mathbb{R}$ が I -正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall B \in \mathcal{B} \setminus I \exists C \in \mathcal{B} \setminus I [C \setminus B \in I \wedge (C \subseteq A \vee C \cap A = \emptyset)].$$

- ★ どんな I -正集合も、縮めれば正集合のまま A に含まれるか、交わらないようにできる.



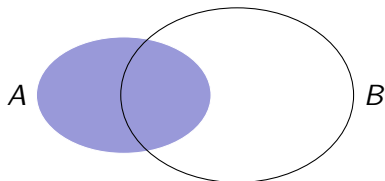
正則性

Definition 6 (Khomsii 2012)

$A \subseteq \mathbb{R}$ が I -正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall B \in \mathcal{B} \setminus I \exists C \in \mathcal{B} \setminus I [C \setminus B \in I \wedge (C \subseteq A \vee C \cap A = \emptyset)].$$

- ★ どんな I -正集合も、縮めれば正集合のまま A に含まれるか、交わらないようにできる。



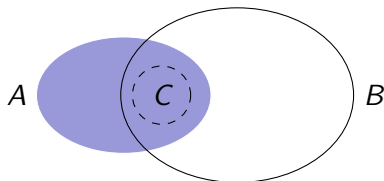
正則性

Definition 6 (Khomsii 2012)

$A \subseteq \mathbb{R}$ が I -正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall B \in \mathcal{B} \setminus I \exists C \in \mathcal{B} \setminus I [C \setminus B \in I \wedge (C \subseteq A \vee C \cap A = \emptyset)].$$

- ★ どんな I -正集合も，縮めれば正集合のまま A に含まれるか，交わらないようにできる。



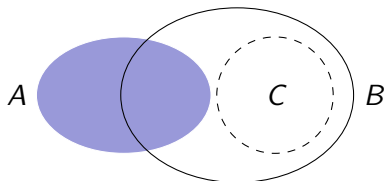
正則性

Definition 6 (Khomsii 2012)

$A \subseteq \mathbb{R}$ が I -正則 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall B \in \mathcal{B} \setminus I \exists C \in \mathcal{B} \setminus I [C \setminus B \in I \wedge (C \subseteq A \vee C \cap A = \emptyset)].$$

- ★ どんな I -正集合も、縮めれば正集合のまま A に含まれるか、交わらないようにできる。



イデアルと正則性の例

- 以下はいずれも σ -イデアル

$$\begin{aligned}\text{null} &:= \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid A : \text{Lebesgue 零集合} \}, \\ \text{meager} &:= \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid A : \text{瘦せ集合} \}\end{aligned}$$

- ★ A : 可測 $\iff A$: null-正則,
 A : Baire の性質を持つ $\iff A$: meager-正則.
- 他の正則性の例 : 完全 Ramsey 性など.

Khomskaa の一般化 Solovay の定理

Theorem 7 (Khomskaa 2012)

I を射影的な σ -イデアルとし、 I^\perp が適正 (*proper*) という性質を満たす順序集合であるとする。この時、Solovay のモデルで、任意の実数の集合は I -正則性を持つ。

射影的 定義式が実数上の量子子だけで書けていること。

適正 順序集合に関する或る種の組合せ論的性質。

- ★ 証明はほぼオリジナルの Solovay の定理と同様。ただし、「ランダム実数」に対応する「 I -生成的実数」の定義は正則性の定義にあわせて変更する必要がある。

Future Work I

Solovay の定理の一般化 適正よりも弱い条件（半適正や急峻の対応物）で示せないか？

Solovay のモデルでの数学の分析 Wright [6] をはじめとして、代替的な体系として $ZF + DC + BP + LM$ で解析学展開する論がある。その集約・発展と、より強い巨大基数から出発して、新たな結果を得られないかを試す。

Future Work II

Solovay の定理の形式化 計算機上で Solovay の定理の証明を形式化する.

↪ ある種の仮定の下で、定義論理式から測度を計算するプログラムが抽出出来ないか？(超楽観的な観測)

Shelah の定理の一般化 Solovay の定理の逆である Shelah の定理は、そのままのステートメントとしては一般化されていない。Khomskii によるイデアル正則性にまで拡張出来ないか？

参考文献 I

- [1] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. 3rd. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002. ISBN: 978-3-540-44085-7.
- [2] Yurii Khomskii. “Regularity Properties and Definability in the Real Number Continuum. Idealized forcing, polarized partitions, Hausdorff gaps and mad families in the projective hierarchy”. PhD thesis. Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, 2012.
- [3] Ralf Schindler. *Set Theory: Exploring Independence and Truth*. Universitext. Springer International Publishing Switzerland, 2014. ISBN: 978-3-319-06724-7.

参考文献 II

- [4] Saharon Shelah. “Can You Take Solovay’s Inaccessible Away?” In: *Israel Journal of Mathematics* 48.1 (1984), pp. 1–47. ISSN: 0021-2172. DOI: 10.1007/BF02760522. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02760522>.
- [5] Robert M. Solovay. “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”. In: *The Annals of Mathematics*. 2nd ser. 92.1 (July 1970), pp. 1–56. ISSN: 0003486X. DOI: 10.2307/1970696. URL: <http://www.jstor.org/stable/1970696>.

参考文献 III

- [6] J. D. Maitland Wright. “Functional Analysis for the Practical Man”. English. In: *Functional analysis: surveys and recent results. Proceedings of the Conference on Functional Analysis* (Paderborn, Germany). Ed. by Klaus-Dieter Bierstedt and Benno Fuchssteiner. Mathematics Studies 27. North-Holland, 1977, pp. 283–290. ISBN: 978-0444850577.