

# Martin の公理, 範疇定理, 小さな基数

石井大海

2018-03-05

## 1 Martin の公理と範疇定理

$\text{MA}(\kappa)$  は「任意の c.c.c. poset  $\mathbb{P}$  に対し  $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ 」という主張だった. この「c.c.c.」というのは落とせない, というのが次の補題:

**補題 1.**  $\neg\text{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$  となるような non-c.c.c. poset  $\mathbb{P}$  が存在する.

*Proof.* 前回のゼミの際に  $\text{Fn}(I, J)$  が c.c.c. を持つことと  $I = \emptyset \vee |J| \leq \aleph_0$  であることが同値なことを見た. そこで,  $I = \omega, J = \omega_1$  の場合を考えれば,  $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega, \omega_1)$  は c.c.c. を持たない. ここで, 次の集合を考える:

$$D_n := \{p \in \mathbb{P} \mid n \in \text{dom}(p)\} \quad (n < \omega) \qquad E_\alpha := \{p \in \mathbb{P} \mid \alpha \in \text{rng}(p)\} \quad (\alpha < \omega_1)$$

$p \in \mathbb{P}$  が有限であることから, 各  $E_n, D_n$  は  $\mathbb{P}$  で稠密. そこで  $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\omega_1)$  とすれば,  $\{D_n, E_\alpha\}$ -ジェネリックなフィルター  $G \subseteq \mathbb{P}$  が取れる. 特に,  $f_G = \bigcup G$  とおくと  $f_G : \omega \xrightarrow{\text{onto}} \omega_1$  となる. これは  $\omega < \omega_1$  に反する.  $\square$

ここでの  $\mathbb{P}$  は c.c.c. でない poset の一例に過ぎない. c.c.c. よりも弱い条件しか満たしていなくても,  $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$  は成り立ちうる. 例えば「c.c.c.」という条件を「proper」という条件に弱めた PFA という公理は ZFC と無矛盾で,  $\text{MA}(\aleph_1)$  から独立な多くの命題を導くことが知られている.

まず初めに見る MA の応用は, Baire の範疇定理の一般化:

**補題 2.**  $\text{MA}(\kappa)$  を仮定する.  $X : \text{c.c.c. コンパクト Hausdorff 空間}, X_\alpha \subseteq X : \text{閉疎集合} (\alpha < \kappa)$

$$\implies \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \neq X$$

*Proof.*  $X$  は c.c.c. を満たすので, 空でない開集合の成す poset  $\mathbb{O}_X$  も c.c.c. を満たすことに注意する.

補集合を取れば、結局示すべき事は次と同値である：

$$U_\alpha : \text{稠密開集合} (\alpha < \kappa) \Rightarrow \bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha \neq \emptyset$$

$G \subseteq \mathbb{O}_X$  をフィルターとすると、 $G$  は有限交叉性を持つ。ここで、 $F_G := \bigcap_{p \in G} \bar{p}$  とおけば、 $F_G$  は空でない。もし  $F_G = \emptyset$  だったとすると、 $\bigcup_{p \in G} p^c = X$  は  $X$  の開被覆である。よって  $X$  のコンパクト性より、 $p_0, \dots, p_n \in G$  があって  $X = p_0^c \cup \dots \cup p_n^c$  と出来る。すると、 $p_0 \cap \dots \cap p_n \subseteq \bar{p}_0 \cap \dots \cap \bar{p}_n = \emptyset$  となり、 $p_i \in G$  に反する。

ここで、 $D_\alpha := \{p \in \mathbb{O}_X \mid \bar{p} \subseteq U_\alpha\}$  ( $\alpha < \kappa$ ) と置くと、各  $D_\alpha$  は稠密である。それを示すため、 $p \in \mathbb{O}_X$  を取ろう。 $U_\alpha$  は稠密開集合なので、 $p \cap U_\alpha \in \mathbb{O}_X$  である。今、 $X$  はコンパクト Hausdorff 空間なので特に正則空間となり、 $\bar{q} \subseteq p \cap U_\alpha$  となるような空でない開集合  $q \in \mathbb{O}_X$  を取ることが出来る。この時取り方から明らかに  $q \leq p$  かつ  $q \in D_\alpha$ 。よって各  $D_\alpha$  は  $\mathbb{O}_X$  で稠密である。

そこで、 $MA(\kappa)$  により、 $\{D_\alpha\}$ -ジェネリックなフィルター  $G \subseteq \mathbb{O}_X$  を取る。先程の議論より  $F_G = \bigcap_{p \in G} \bar{p} \neq \emptyset$  である。特に、 $G \cap U_\alpha \neq \emptyset$  より各  $\alpha$  について  $\bigcap_{p \in G} \bar{p} \subseteq \bar{p} \subseteq U_\alpha$  となるような  $p \in G$  が存在する。よって、

$$\bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha \supseteq \bigcap_{p \in G} \bar{p} \neq \emptyset$$

□

ジェネリックフィルターの補題より  $\kappa = \omega$  の場合は c.c.c. 性を落として、一般のコンパクト Hausdorff 空間について成り立つことになる。最初にも述べたように、これは Baire の範疇定理の拡張になっていて、ここで  $MA(\kappa)$  を使ってジェネリックフィルターを取っている部分が通常の証明で開集合の  $\omega$ -列を取る所と対応している。実際にはこの形の命題は  $MA(\kappa)$  と同値である事が後の節でわかる。

この定理は、もし  $X$  が孤立点を持つなら  $MA(\kappa)$  など仮定しなくても自明に成立する（孤立点は一点で開集合になるのだ）。これは、 $\mathbb{P}$  がアトムを持つ時に  $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$  が自明に成立するのと似ている。

**Def. 1.**  $r \in \mathbb{P}$  が  $\mathbb{P}$  のアトム  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p, q \leq r [p \parallel q]$

特に、Hausdorff 空間の場合、 $r \in \mathbb{O}_X$  がアトム  $\iff |r| = 1$  である。

**補題 3.**

- $r \in \mathbb{P}$  がアトムなら、 $\forall \kappa MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$
- $\mathbb{P}$  がアトムを持たないなら、 $\neg MA_{\mathbb{P}}(2^{|\mathbb{P}|})$

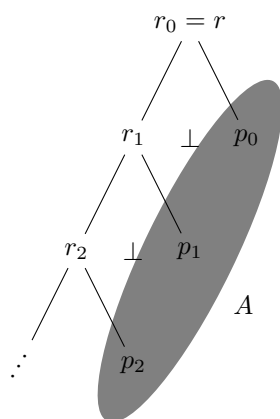
*Proof.* 証明は前回やったのもうやらない。 □

もしも  $\mathbb{P}$  がアトムを持たないなら、任意の  $r \in \mathbb{P}$  について、それより下に少なくとも可算濃度の反鎖が存在

することがわかる：

**補題 4.**  $\mathbb{P}$  がアトムを持たない  $\Rightarrow \forall r \in \mathbb{P} \exists A \subseteq \downarrow r [|A| \geq \aleph_0 \wedge A \text{ は反鎖}]$

*Proof.* 下図の通り：



□

## 2 Martin の公理と小さな基数

**Def. 2.**  $m$  を  $\neg MA(\kappa)$  となる最小の  $\kappa$  とする.

今までの結果を纏めると、 $\aleph_1 \leq m \leq c$  となるこれは第一節で議論した小さな基数たちの範囲と同じだが、特に  $m$  は今まで議論した中で最小なことがわかる。この記号を使えば  $MA \Leftrightarrow m = c$  だから、 $MA$  の下ではこれらの基数は全て  $c$  と一致することになる。今回は特に  $m \leq p$  を示す。

**Def. 3.**

- 集合族  $\mathcal{E}$  が **強有限交叉性** (Strong Finite Intersection Property; *SFIP*) を持つ  
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \mathcal{F} \in [\mathcal{E}]^{<\omega} |\bigcap \mathcal{F}| \geq \aleph_0$
- $K$  が  $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$  の **擬共通部分** (pseudointersection) である  $\stackrel{\text{def}}{\iff} |K| = \aleph_0 \wedge \forall Z \in \mathcal{E} [K \subseteq^* Z]$
- $p = \text{SFIP}$  を持つが擬共通部分を持たないような  $[\omega]^\omega$  の部分集合の最小濃度

第一節で議論した髭文字系の小さな基数の中で  $p$  は最小だった。以下では  $m \leq p$  を示す：

補題 5.  $m \leq p$

*Proof.*  $\kappa < m \rightarrow \kappa < p$  を示そう。即ち,  $\text{MA}(\kappa)$  を仮定し,  $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$  を SFIP を持つ濃度  $\kappa$  の族とした時,  $\mathcal{E}$  は擬共通部分  $K$  を持つことを示す。

$\mathbb{P} := \{ p = \langle s_p, \mathcal{W}_p \rangle : s_p \in [\omega]^{<\omega} \wedge \mathcal{W}_p \in [\mathcal{E}]^{<\omega} \}$  と置く。気持ちとしては各  $s_p$  が  $K$  の下からの有限近似であり,  $\mathcal{W}_p$  は  $s_p$  の差を除いて  $K$  を含むことが保証された  $\mathcal{E}$  の元の一覧になっている。その気持ちを念頭において,  $\mathbb{P}$  上に次のように順序を定める:

$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} s_p \supseteq s_q & (s_p \text{ は } s_q \text{ よりよい近似}) \\ \mathcal{W}_p \supseteq \mathcal{W}_q & (\mathcal{W}_p \text{ は } \mathcal{W}_q \text{ より沢山保証}) \\ \forall Z \in \mathcal{W}_q [s_p \setminus s_q \subseteq Z] & (p \text{ は } q \text{ の約束を破らない}) \end{cases}$$

これにより,  $\langle \mathbb{P}, \leq, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rangle$  が forcing poset となるのは明らか。  $\text{MA}(\kappa)$  を使いたいで,  $\mathbb{P}$  が c.c.c. を満たすことを示さなくてはならない。ここで,

$$s_p = s_q \longrightarrow s_p \parallel s_q \quad (*)$$

が成立する。なぜならこの時,  $r = \langle s_p, \mathcal{W}_p \cup \mathcal{W}_q \rangle$  とおけば明らかに  $r \leq p, q$  となるからである。特に各  $s \in [\omega]^{<\omega}$  は可算個しかないから, もし  $A \subseteq \mathbb{P}$  が非可算集合であったとすると, 必ず  $s_p = s_q$  となる  $p, q \in A$  があり  $s_p \parallel s_q$  となるので,  $A$  は反鎖ではない。よって  $\mathbb{P}$  は c.c.c. を満たす。

$G \subseteq \mathbb{P}$  をフィルターとすると,  $K_G := \bigcup_p s_p$  により  $K_G \subseteq \omega$  を定める。この時,  $K_G$  が  $\mathcal{E}$  の擬共通部分となるようにしたい。より具体的には, 次の二条件を満たすようにしたい:

- (a)  $|K_G| \geq \aleph_0$
- (b)  $\forall Z \in \mathcal{E} \exists s \in [\omega]^{<\omega} [K_G \setminus s \subseteq Z]$

まず (a) を成立させるには,  $G$  を次の各集合と交わるように取ればよいことがわかる:

$$D_n := \{ q \in \mathbb{P} : |q| \geq n \} \quad (n < \omega)$$

ここで,  $\mathcal{E}$  が SFIP を持つことから各  $D_n$  は稠密集合となる事がわかる。これを示すため,  $p \in \mathbb{P}$  を任意に取る。この時  $\mathcal{W}_p$  は  $\mathcal{E}$  の元からなる有限集合であり,  $\mathcal{E}$  が SFIP を持つことから  $\bigcap \mathcal{W}_p$  は無限集合となる。よって  $t \in [\bigcap \mathcal{W}_p]^n$  が取れ,  $r = \langle s_p \cup t, \mathcal{W}_p \rangle$  とおけば,  $D_n \ni r \leq p$  となる。よって  $D_n$  の全体は可算個しかないので,  $G \cap D_n \neq \emptyset$  となるようにできる。

次に (b) を成り立たせたい。各  $Z \in \mathcal{E}$  に対し  $E_Z := \{ q \in \mathbb{P} : Z \in \mathcal{W}_q \}$  の形の集合を考えると, これは  $\mathbb{P}$  の稠密集合である。これは,  $p \in \mathbb{P}$  に対し  $r = \langle s_p, \mathcal{W}_p \cup \{Z\} \rangle$  とおけば  $r \leq p$  かつ  $r \in E_Z$  となることから明らかである。このような  $E_Z$  は  $|\mathcal{E}| = \kappa$  個しかなく, 今  $\text{MA}(\kappa)$  を仮定しているので, フィルター  $G$  を各  $E_Z$  と交わるように取ることが出来る。この時 (b) が成立することは, 次のようにしてわかる。適当な  $Z \in \mathcal{E}$  を取れば,  $G \cap E_Z \neq \emptyset$  より  $Z \in \mathcal{W}_p$  を満たすような  $p \in G$  が存在する。この時, 任意の  $q \in G$  に対し  $s_q \setminus s_p \subseteq Z$  となることが示せれば十分である。何故ならこのとき  $K_G \setminus s_p = \bigcup_q (s_q \setminus s_p) \subseteq Z$  となるからである。  $G$  はフィルターなので,  $r \leq p, q$  となるような  $r \in G$  が存在する。特に順序の定義から  $s_r \supseteq s_q$  かつ  $s_r \setminus s_p \subseteq Z \in \mathcal{W}_p$  となっているので,  $s_q \setminus s_p \subseteq Z$  が云える。以上より  $K_G$  は  $\mathcal{E}$  の擬共通部分である。  $\square$

上の議論では (★) の条件が本質的な役割を果たしている。MA を用いた議論ではしばしばこれに類似の論法が使われるので、それをちょっと詳しく見てみよう：

**Def. 4.**

- $C \subseteq \mathbb{P}$  が *centered*  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p_0, \dots, p_n \in C \exists q \in \mathbb{P} \forall i [q \leq p_i]$
- $\mathbb{P}$  が  $\sigma$ -centered  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}$  は可算個の *centered* 部分集合の和である。

$C \subseteq \mathbb{P}$  が *centered* であるというのは、有限交叉性の一般化になっている。例えば、位相空間  $X$  に対し  $\mathbb{O}_X$  を考えると、 $C \subseteq \mathbb{O}_X$  が *centered* であることと  $C$  が有限交叉的であることは同値である。

実際、上の補題が実際に使っているのは  $\text{MA}(\kappa)$  を  $\sigma$ -centered な集合に制限したものである。より強く、次が成り立つ：

**補題 6.** 補題 5 で用いた poset は可算個のフィルターの和で表せる。特に  $\sigma$ -centered である。

*Proof.* 各  $s \in [\omega]^{<\omega}$  に対し、 $C_s := \{p \in \mathbb{P} : s_p = s\}$  とおけば  $\mathbb{P} = \bigcup_s C_s$  である。特に、 $p, q \in C_s$  ならば  $r \in C_s$  の範囲で  $r \leq p, q$  となるものが取れる。よって  $C_s$  はフィルター基になっており、 $\mathcal{F}_s = \uparrow C_s$  とおけば  $\mathcal{F}_s$  はフィルターとなり、 $\mathbb{P} = \bigcup_s C_s = \bigcup_s \mathcal{F}_s$  となる。 □

上の証明では、各  $C_s$  を拡張する際に各  $p_i$  の下界が再び  $C_s$  に属することを使っているが、一般の  $\sigma$ -centered 集合でそうになっている訳ではない。実用上殆んどの場合は  $\sigma$ -centered な poset はフィルターの可算和で書けるが、そうでないような例も知られている。また、これも後で見ることだが、 $\kappa < \mathfrak{p}$  であることと、 $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$  が  $\sigma$ -centered な物について成立することは同値となる。

centered な集合の二元は両立してしまうため、反鎖は各 centered 集合の元を高々一つしか持たないことがわかる。これは、正しく先程の証明の論法を一般化したものになっている：

**補題 7.**  $\mathbb{P}$  が  $\sigma$ -centered  $\implies \mathbb{P}$  は c.c.c. を持つ

一般に逆は不成立である：

**演習問題 1.**  $X$  をコンパクト Hausdorff 空間とすると、次は同値：

- (1)  $X$  は可分
  - (2)  $\mathbb{O}_X$  は  $\sigma$ -centered
  - (3)  $\mathbb{O}_X$  はフィルターの可算和
-

特に,  $\kappa > \mathfrak{c}$ ,  $X = {}^\kappa 2$  とすると,  $\mathbb{O}_X$  は c.c.c. だが  $\sigma$ -centered でない順序集合の例になっている.

*Proof.*  $\mathbb{O}_X$  では centered 性と有限交叉性は同値であったので, centered 集合から生成されるフィルターを考えれば (2)  $\Leftrightarrow$  (3) は OK. そこで (1)  $\Leftrightarrow$  (3) を示す.

( $\Rightarrow$ ) を示そう.  $D = \{d_n : n < \omega\} \subseteq X$  を  $X$  の可算な稠密集合とする. この時  $\mathcal{U}_n := \{p \in \mathbb{O}_X : d_n \in p\}$  とおけば, 各  $\mathcal{U}_n$  はフィルターとなる. この時  $D$  の稠密性より空でない開集合は  $d_i$  のいずれかを元にもつので,  $\mathbb{O}_X = \bigcup_n \mathcal{U}_n$  となる.

( $\Leftarrow$ ) を示す. フィルター  $\mathcal{F}_n$  により  $\mathbb{O}_X = \bigcup_n \mathcal{F}_n$  と書けているとする. この時超フィルターの補題によって各フィルターを超フィルター  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$  に拡張する.  $X$  はコンパクトなので各  $\mathcal{U}_n$  は必ず収束点を持ち, Hausdorff 性よりその収束先は一意に来る. そこで,

$$D = \{d_n = \lim \mathcal{U}_n : n < \omega\}$$

と置き,  $D$  が  $X$  の稠密集合であることを示す.  $U \in \mathbb{O}_X$  を任意にとれば,  $X$  はコンパクト Hausdorff 空間なので正則空間となり,  $V \in \mathbb{O}_X$  で  $\bar{V} \subseteq U$  を満たすものが取れる. すると仮定より  $V \in \mathcal{U}_n$  となるような  $n < \omega$  が存在する. 今  $\mathcal{U}_n$  は  $d_n$  に収束するので, 位相空間の一般論より  $d_n \in \bar{V} \subseteq U$  となる. よって  $U \cap D \neq \emptyset$ . □

$\kappa > \mathfrak{c}$  の時  $X = {}^\kappa 2$  が  $\sigma$ -centered でない c.c.c. poset の例になっていることは次のようにしてわかる. まず  $2$  は可分なので, 教科書の系 III.2.10 よりその直積  ${}^\kappa 2$  は c.c.c. となり,  $\mathbb{O}_X$  も c.c.c. となる. ところで, 教科書の補題 III.2.11 によれば,  $X_i$  が二点以上持つ Hausdorff 空間で  $|I| > \mathfrak{c}$  の時,  $\prod_{i \in I} X_i$  は可分ではない. よって  ${}^\kappa 2$  は可分ではない. Tychonoff の定理より  $X$  はコンパクトであり, Hausdorff 性も明らか. よって上の結果より,  $\mathbb{O}_X$  は  $\sigma$ -centered ではない.

## 参考文献

- [1] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.
- [2] 酒井克郎. **位相空間の基礎概念**. 2012. URL: <https://sites.google.com/site/ksakaiidtopology/ri-ben-yunopeji/basic-topology>.
- [3] 松坂和夫. **集合・位相入門**. 岩波書店, 1986.