

Martin の公理, 範疇定理, 小さな基数

石井大海

2018-12-15

1 Martin の公理と範疇定理

$\text{MA}(\kappa)$ は「任意の c.c.c. poset \mathbb{P} に対し $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ 」という主張だった. この「c.c.c.」というのは落とせない, というのが次の補題:

補題 1. $\neg\text{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ となるような non-c.c.c. poset \mathbb{P} が存在する.

Proof. 前回のゼミの際に $\text{Fn}(I, J)$ が c.c.c. を持つことと $I = \emptyset \vee |J| \leq \aleph_0$ であることが同値なことを見た. そこで, $I = \omega, J = \omega_1$ の場合を考えれば, $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega, \omega_1)$ は c.c.c. を持たない. ここで, 次の集合を考える:

$$D_n := \{p \in \mathbb{P} \mid n \in \text{dom}(p)\} \quad (n < \omega) \qquad E_\alpha := \{p \in \mathbb{P} \mid \alpha \in \text{rng}(p)\} \quad (\alpha < \omega_1)$$

$p \in \mathbb{P}$ が有限であることから, 各 E_n, D_n は \mathbb{P} で稠密. そこで $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\omega_1)$ とすれば, $\{D_n, E_\alpha\}$ -ジェネリックなフィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ が取れる. 特に, $f_G = \bigcup G$ とおくと $f_G : \omega \xrightarrow{\text{onto}} \omega_1$ となる. これは $\omega < \omega_1$ に反する. \square

ここでの \mathbb{P} は c.c.c. でない poset の一例に過ぎない. c.c.c. よりも弱い条件しか満たしていなくても, $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ は成り立ちうる. 例えば「c.c.c.」という条件を「proper」という条件に弱めた PFA という公理は ZFC と無矛盾で, $\text{MA}(\aleph_1)$ から独立な多くの命題を導くことが知られている.

まず初めに見る MA の応用は, Baire の範疇定理の一般化:

補題 2. $\text{MA}(\kappa)$ を仮定する. $X : \text{c.c.c. コンパクト Hausdorff 空間}, X_\alpha \subseteq X : \text{閉疎集合} (\alpha < \kappa)$

$$\implies \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \neq X$$

Proof. X は c.c.c. を満たすので, 空でない開集合の成す poset \mathbb{O}_X も c.c.c. を満たすことに注意する.

補集合を取れば、結局示すべき事は次と同値である：

$$U_\alpha : \text{稠密開集合} (\alpha < \kappa) \Rightarrow \bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha \neq \emptyset$$

$G \subseteq \mathbb{O}_X$ をフィルターとすると、 G は有限交叉性を持つ。ここで、 $F_G := \bigcap_{p \in G} \bar{p}$ とおけば、 F_G は空でない。もし $F_G = \emptyset$ だったとすると、 $\bigcup_{p \in G} p^c = X$ は X の開被覆である。よって X のコンパクト性より、 $p_0, \dots, p_n \in G$ があって $X = p_0^c \cup \dots \cup p_n^c$ と出来る。すると、 $p_0 \cap \dots \cap p_n \subseteq \bar{p}_0 \cap \dots \cap \bar{p}_n = \emptyset$ となり、 $p_i \in G$ に反する。

ここで、 $D_\alpha := \{p \in \mathbb{O}_X \mid \bar{p} \subseteq U_\alpha\}$ ($\alpha < \kappa$) と置くと、各 D_α は稠密である。それを示すため、 $p \in \mathbb{O}_X$ を取ろう。 U_α は稠密開集合なので、 $p \cap U_\alpha \in \mathbb{O}_X$ である。今、 X はコンパクト Hausdorff 空間なので特に正則空間となり、 $\bar{q} \subseteq p \cap U_\alpha$ となるような空でない開集合 $q \in \mathbb{O}_X$ を取ることが出来る。この時取り方から明らかに $q \leq p$ かつ $q \in D_\alpha$ 。よって各 D_α は \mathbb{O}_X で稠密である。

そこで、 $MA(\kappa)$ により、 $\{D_\alpha\}$ -ジェネリックなフィルター $G \subseteq \mathbb{O}_X$ を取る。先程の議論より $F_G = \bigcap_{p \in G} \bar{p} \neq \emptyset$ である。特に、 $G \cap U_\alpha \neq \emptyset$ より各 α について $\bigcap_{p \in G} \bar{p} \subseteq \bar{p} \subseteq U_\alpha$ となるような $p \in G$ が存在する。よって、

$$\bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha \supseteq \bigcap_{p \in G} \bar{p} \neq \emptyset$$

□

ジェネリックフィルターの補題より $\kappa = \omega$ の場合は c.c.c. 性を落として、一般のコンパクト Hausdorff 空間について成り立つことになる。最初にも述べたように、これは Baire の範疇定理の拡張になっていて、ここで $MA(\kappa)$ を使ってジェネリックフィルターを取っている部分が通常の証明で開集合の ω -列を取る所と対応している。実際にはこの形の命題は $MA(\kappa)$ と同値である事が後の節でわかる。

この定理は、もし X が孤立点を持つなら $MA(\kappa)$ など仮定しなくても自明に成立する（孤立点は一点で開集合になるのだ）。これは、 \mathbb{P} がアトムを持つ時に $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ が自明に成立するのと似ている。

Def. 3. $r \in \mathbb{P}$ が \mathbb{P} のアトム $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p, q \leq r [p \parallel q]$

特に、Hausdorff 空間の場合、 $r \in \mathbb{O}_X$ がアトム $\iff |r| = 1$ である。

補題 4.

- $r \in \mathbb{P}$ がアトムなら、 $\forall \kappa MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$
- \mathbb{P} がアトムを持たないなら、 $\neg MA_{\mathbb{P}}(2^{|\mathbb{P}|})$

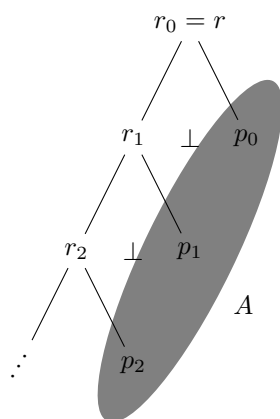
Proof. 証明は前回やったのもうやらない。 □

もしも \mathbb{P} がアトムを持たないなら、任意の $r \in \mathbb{P}$ について、それより下に少なくとも可算濃度の反鎖が存在

することがわかる：

補題 5. \mathbb{P} がアトムを持たない $\Rightarrow \forall r \in \mathbb{P} \exists A \subseteq \downarrow r [|A| \geq \aleph_0 \wedge A \text{ は反鎖}]$

Proof. 下図の通り：



□

2 Martin の公理と小さな基数

Def. 6. m を $\neg MA(\kappa)$ となる最小の κ とする.

今までの結果を纏めると、 $\aleph_1 \leq m \leq c$ となるこれは第一節で議論した小さな基数たちの範囲と同じだが、特に m は今まで議論した中で最小なことがわかる。この記号を使えば $MA \Leftrightarrow m = c$ だから、 MA の下ではこれらの基数は全て c と一致することになる。今回は特に $m \leq p$ を示す。

Def. 7.

- 集合族 \mathcal{E} が **強有限交叉性** (Strong Finite Intersection Property; *SFIP*) を持つ
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \mathcal{F} \in [\mathcal{E}]^{<\omega} \left| \bigcap \mathcal{F} \right| \geq \aleph_0$
- K が $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$ の **擬共通部分** (*pseudointersection*) である $\stackrel{\text{def}}{\iff} |K| = \aleph_0 \wedge \forall Z \in \mathcal{E} [K \subseteq^* Z]$
- $p = \text{SFIP}$ を持つが擬共通部分を持たないような $[\omega]^\omega$ の部分集合の最小濃度

第一節で議論した髭文字系の小さな基数の中で p は最小だった。以下では $m \leq p$ を示す：

補題 8. $m \leq p$

Proof. $\kappa < m \rightarrow \kappa < p$ を示そう。即ち, $\text{MA}(\kappa)$ を仮定し, $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$ を SFIP を持つ濃度 κ の族とした時, \mathcal{E} は擬共通部分 K を持つことを示す。

$\mathbb{P} := \{ p = \langle s_p, \mathcal{W}_p \rangle : s_p \in [\omega]^{<\omega} \wedge \mathcal{W}_p \in [\mathcal{E}]^{<\omega} \}$ と置く。気持ちとしては各 s_p が K の下からの有限近似であり, \mathcal{W}_p は s_p の差を除いて K を含むことが保証された \mathcal{E} の元の一覧になっている。その気持ちを念頭において, \mathbb{P} 上に次のように順序を定める:

$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} s_p \supseteq s_q & (s_p \text{ は } s_q \text{ よりよい近似}) \\ \mathcal{W}_p \supseteq \mathcal{W}_q & (\mathcal{W}_p \text{ は } \mathcal{W}_q \text{ より沢山保証}) \\ \forall Z \in \mathcal{W}_q [s_p \setminus s_q \subseteq Z] & (p \text{ は } q \text{ の約束を破らない}) \end{cases}$$

これにより, $\langle \mathbb{P}, \leq, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rangle$ が forcing poset となるのは明らか。 $\text{MA}(\kappa)$ を使いたいで, \mathbb{P} が c.c.c. を満たすことを示さなくてはならない。ここで,

$$s_p = s_q \longrightarrow s_p \parallel s_q \quad (*)$$

が成立する。なぜならこの時, $r = \langle s_p, \mathcal{W}_p \cup \mathcal{W}_q \rangle$ とおけば明らかに $r \leq p, q$ となるからである。特に各 $s \in [\omega]^{<\omega}$ は可算個しかないから, もし $A \subseteq \mathbb{P}$ が非可算集合であったとすると, 必ず $s_p = s_q$ となる $p, q \in A$ があり $s_p \parallel s_q$ となるので, A は反鎖ではない。よって \mathbb{P} は c.c.c. を満たす。

$G \subseteq \mathbb{P}$ をフィルターとすると, $K_G := \bigcup_p s_p$ により $K_G \subseteq \omega$ を定める。この時, K_G が \mathcal{E} の擬共通部分となるようにしたい。より具体的には, 次の二条件を満たすようにしたい:

- (a) $|K_G| \geq \aleph_0$
- (b) $\forall Z \in \mathcal{E} \exists s \in [\omega]^{<\omega} [K_G \setminus s \subseteq Z]$

まず (a) を成立させるには, G を次の各集合と交わるように取ればよいことがわかる:

$$D_n := \{ q \in \mathbb{P} : |q| \geq n \} \quad (n < \omega)$$

ここで, \mathcal{E} が SFIP を持つことから各 D_n は稠密集合となる事がわかる。これを示すため, $p \in \mathbb{P}$ を任意に取る。この時 \mathcal{W}_p は \mathcal{E} の元からなる有限集合であり, \mathcal{E} が SFIP を持つことから $\bigcap \mathcal{W}_p$ は無限集合となる。よって $t \in [\bigcap \mathcal{W}_p]^n$ が取れ, $r = \langle s_p \cup t, \mathcal{W}_p \rangle$ とおけば, $D_n \ni r \leq p$ となる。よって D_n の全体は可算個しかないので, $G \cap D_n \neq \emptyset$ となるようにできる。

次に (b) を成り立たせたい。各 $Z \in \mathcal{E}$ に対し $E_Z := \{ q \in \mathbb{P} : Z \in \mathcal{W}_q \}$ の形の集合を考えると, これは \mathbb{P} の稠密集合である。これは, $p \in \mathbb{P}$ に対し $r = \langle s_p, \mathcal{W}_p \cup \{Z\} \rangle$ とおけば $r \leq p$ かつ $r \in E_Z$ となることから明らかである。このような E_Z は $|\mathcal{E}| = \kappa$ 個しかなく, 今 $\text{MA}(\kappa)$ を仮定しているので, フィルター G を各 E_Z と交わるように取ることが出来る。この時 (b) が成立することは, 次のようにしてわかる。適当な $Z \in \mathcal{E}$ を取れば, $G \cap E_Z \neq \emptyset$ より $Z \in \mathcal{W}_p$ を満たすような $p \in G$ が存在する。この時, 任意の $q \in G$ に対し $s_q \setminus s_p \subseteq Z$ となることが示せれば十分である。何故ならこのとき $K_G \setminus s_p = \bigcup_q (s_q \setminus s_p) \subseteq Z$ となるからである。 G はフィルターなので, $r \leq p, q$ となるような $r \in G$ が存在する。特に順序の定義から $s_r \supseteq s_q$ かつ $s_r \setminus s_p \subseteq Z \in \mathcal{W}_p$ となっているので, $s_q \setminus s_p \subseteq Z$ が云える。以上より K_G は \mathcal{E} の擬共通部分である。 \square

上の議論では (*) の条件が本質的な役割を果たしている。MA を用いた議論ではしばしばこれに類似の論法が使われるので、それをちょっと詳しく見てみよう：

Def. 9.

- $C \subseteq \mathbb{P}$ が *centered* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p_0, \dots, p_n \in C \exists q \in \mathbb{P} \forall i [q \leq p_i]$
- \mathbb{P} が σ -centered $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}$ は可算個の centered 部分集合の和である。

$C \subseteq \mathbb{P}$ が centered であるというのは、有限交叉性の一般化になっている。例えば、位相空間 X に対し \mathbb{O}_X を考えると、 $C \subseteq \mathbb{O}_X$ が centered であることと C が有限交叉的であることは同値である。

実際、上の補題が実際に使っているのは $\text{MA}(\kappa)$ を σ -centered な集合に制限したものである。より強く、次が成り立つ：

補題 10. 補題 8 で用いた poset は可算個のフィルターの和で表せる。特に σ -centered である。

Proof. 各 $s \in [\omega]^{<\omega}$ に対し、 $C_s := \{p \in \mathbb{P} : s_p = s\}$ とおけば $\mathbb{P} = \bigcup_s C_s$ である。特に、 $p, q \in C_s$ ならば $r \in C_s$ の範囲で $r \leq p, q$ となるものが取れる。よって C_s はフィルター基になっており、 $\mathcal{F}_s = \uparrow C_s$ とおけば \mathcal{F}_s はフィルターとなり、 $\mathbb{P} = \bigcup_s C_s = \bigcup_s \mathcal{F}_s$ となる。 □

上の証明では、各 C_s を拡張する際に各 p_i の下界が再び C_s に属することを使っているが、一般の σ -centered 集合でそうなっている訳ではない。実用上殆んどの場合 σ -centered な poset はフィルターの可算和で書けるが、そうでないような例も知られている。また、これも後で見ることだが、 $\kappa < \mathfrak{p}$ であることと、 $\text{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ が σ -centered な物について成立することは同値となる。

centered な集合の二元は両立してしまうため、反鎖は各 centered 集合の元を高々一つしか持たないことがわかる。これは、正しく先程の証明の論法を一般化したものになっている：

補題 11. \mathbb{P} が σ -centered $\Rightarrow \mathbb{P}$ は c.c.c. を持つ

一般に逆は不成立である：

演習問題 1. X をコンパクト Hausdorff 空間とすると、次は同値：

- (1) X は可分
 - (2) \mathbb{O}_X は σ -centered
 - (3) \mathbb{O}_X はフィルターの可算和
-

特に, $\kappa > \mathfrak{c}$, $X = {}^\kappa 2$ とすると, \mathbb{O}_X は c.c.c. だが σ -centered でない順序集合の例になっている.

Proof. \mathbb{O}_X では centered 性と有限交叉性は同値であったので, centered 集合から生成されるフィルターを考えれば (2) \Leftrightarrow (3) は OK. そこで (1) \Leftrightarrow (3) を示す.

(\Rightarrow) を示そう. $D = \{d_n : n < \omega\} \subseteq X$ を X の可算な稠密集合とする. この時 $\mathcal{U}_n := \{p \in \mathbb{O}_X : d_n \in p\}$ とおけば, 各 \mathcal{U}_n はフィルターとなる. この時 D の稠密性より空でない開集合は d_i のいずれかを元にもつので, $\mathbb{O}_X = \bigcup_n \mathcal{U}_n$ となる.

(\Leftarrow) を示す. フィルター \mathcal{F}_n により $\mathbb{O}_X = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ と書けているとする. この時超フィルターの補題によって各フィルターを超フィルター $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ に拡張する. X はコンパクトなので各 \mathcal{U}_n は必ず収束点を持ち, Hausdorff 性よりその収束先は一意に来る. そこで,

$$D = \{d_n = \lim \mathcal{U}_n : n < \omega\}$$

と置き, D が X の稠密集合であることを示す. $U \in \mathbb{O}_X$ を任意にとれば, X はコンパクト Hausdorff 空間なので正則空間となり, $V \in \mathbb{O}_X$ で $\bar{V} \subseteq U$ を満たすものが取れる. すると仮定より $V \in \mathcal{U}_n$ となるような $n < \omega$ が存在する. 今 \mathcal{U}_n は d_n に収束するので, 位相空間の一般論より $d_n \in \bar{V} \subseteq U$ となる. よって $U \cap D \neq \emptyset$. □

$\kappa > \mathfrak{c}$ の時 $X = {}^\kappa 2$ が σ -centered でない c.c.c. poset の例になっていることは次のようにしてわかる. まず 2 は可分なので, 教科書の系 III.2.10 よりその直積 ${}^\kappa 2$ は c.c.c. となり, \mathbb{O}_X も c.c.c. となる. ところで, 教科書の補題 III.2.11 によれば, X_i が二点以上持つ Hausdorff 空間で $|I| > \mathfrak{c}$ の時, $\prod_{i \in I} X_i$ は可分ではない. よって ${}^\kappa 2$ は可分ではない. Tychonoff の定理より X はコンパクトであり, Hausdorff 性も明らか. よって上の結果より, \mathbb{O}_X は σ -centered ではない.

参考文献

- [1] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.
- [2] 酒井克郎. **位相空間の基礎概念**. 2012. URL: <https://sites.google.com/site/ksakaiidtopology/ri-ben-yunopeji/basic-topology>.
- [3] 松坂和夫. **集合・位相入門**. 岩波書店, 1986.