圏の骨格と選択公理

早稲田大学 数学科二年
石井 大海

平成 24 年 3 月 4 日

1 要旨

選択公理と同値な命題として，圏論における骨格の存在定理を採り上げる．そのため，まず必要となる圏の知識を概説し，それから定理と選択公理の同値性証明に入る．定理の存在自体は英語版 Wikipedia [6] の記事から見付けてきた．

圏の骨格の定義は Mac Lane [3] および檜山 [4] に依る．骨格の存在証明は，nLab [5] および Awodey [1] を参考にしたが，これらの主眼は骨格ともとの圏の同値性であり，また nLab での骨格の定義は我々の採用しているものと異なるので，ここで紹介する証明はこれらとは若干異なるか簡略化されたものとなっている．逆に，骨格の存在定理から選択公理を導く証明は nLab の方に載っていたものを，より詳細に厳密に書き直したものを掲載してある[1]．

2 前提知識

議論に入る前に，圏論の知識と選択公理についての幾つかの確認を行っておく．

2.1 圏論

ここで扱うのは圏論の命題であるので，簡単に圏論についての導入を行っておく．

Def. 1 (圏)**.** 圏 $\mathbf{C}$ とは,

- 対象：$A, B, C, \ldots$
- 射：$f, g, h, \ldots$

の二つの構成要素からなり，以下の条件を満たすものである．

(i) 任意の射 f について，ドメイン・コドメンと呼ばれる対象 $\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)$ がそれぞれ一意に与えられている．特に，$A = \mathrm{dom}(f)$, $B = \mathrm{cod}(f)$ であるとき，

$$f : A \to B$$

とかく．

(ii) $f : A \to B, g : B \to C$ なる任意の射 f, g に対し，その合成射と呼ばれる射

$$g \circ f : A \to C$$

が与えられている．

(iii) 任意の対象 A に対し，恒等射 1_A が存在し，射の合成について単位元となる．すなわち，次が成立する．

$$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f \quad ({}^\forall f : A \to B)$$

(iv) 射の合成の結合律が成立する．即ち，任意の $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対し，

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

である．以下，三つ以上の射の合成は括弧を省略し $h \circ g \circ f$ と書く．

特に混乱のない場合，A が $\mathbf{C}$ の対象であることを $A \in \mathbf{C}$ と書く．また，射についても同様に $f \in \mathbf{C}$ などと書いたりする．また，圏は対象・射と区別するために太字で書かれる．

[1]最初載っているのに気付かずに自力で証明していた．悲しい

圏はモノイドや群，あるいは順序集合の概念を一般化したものである．圏はそれ自身，射や対象と云った言葉を無定義述語と見做すことで一階述語論理上の理論と見做すことが出来るが，ここでは集合論に翻訳したものを使う．つまり，圏 $\mathbf{C}$ は，対象の集まり C_0 と射の集まり C_1 からなるものと理解する．ここで「集まり」としたのは，圏論で扱う対象は一般的に大きく，時として射や対象の全体が集合とならない場合がある為である．対象の全体も射の全体も集合となっている圏を，小さな圏と云う．以下で単に圏と云った場合，小さな圏を指すことが多い．また，以下では $\mathbf{C}$ の対象の集まりを $C_0 = |\mathbf{C}|$ と書くことがある．

さて，圏はモノイドや順序集合の一般化であると述べた．では，モノイド準同型や順序集合に対する単調写像に対応するものは何か？それは函手である．

Def. 2 (函手)**.** 圏 $\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}$ への函手 F とは，写像 $F_0 : C_0 \to D_0, F_1 : C_1 \to D_1$ の組であり，次を満たすものである．

(i) $F_1(f : A \to B) = F_1(f) : F_0(A) \to F_0(B)$
$({}^\forall f : A \to B \in \mathbf{C})$

(ii) $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)} \quad ({}^\forall A \in \mathbf{C})$

(iii) $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$
$({}^\forall f : A \to B, g : B \to C \in \mathbf{C})$

大抵の場合，函手の対象・射に対する写像は区別せず，単に F で表わす．例えば最初の条件式は，

$$F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$$

などと書く．また，函手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が充満函手であるとは，任意の $A, B \in \mathbf{C}$ および $g : F(A) \to F(B) \in \mathbf{D}$ に対し，ある $f : A \to B \in \mathbf{C}$ が存在して，

$$F(f : A \to B) = g : F(A) \to F(B)$$

となることである．

各 F_0, F_1 の写像を合成することにより，函手の合成を定義できる．また，任意の圏 $\mathbf{C}$ に対して，恒等函手 $1_{\mathbf{C}}$ が存在する．以上より，すべての（小さな）圏を対象とし，とその間の函手を射とする（大きな）圏 $\mathbf{Cat}$ が得られる．

群やモノイドに対する部分群・部分モノイドを考えることが出来るように，圏に対しても部分圏を考えることが出来る．

Def. 3 (部分圏)**.** $\mathbf{D}$ が圏 $\mathbf{C}$ の部分圏であるとは，対象の集まり $D_0 \subseteq C_0$ と射の集まり $D_1 \subseteq C_1$ を持ち，$\mathbf{D}$ の任意の対象に対する恒等射が存在し，かつ射が合成について閉じていることである．

$\mathbf{D}$ を $\mathbf{C}$ の部分圏とすると，$\mathbf{D}$ の対象・射をそのまま $\mathbf{C}$ へと移す自明な包含函手 $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が存在することがわかる．特に，この包含函手が充満函手であるとき，即ち $\mathbf{D}$ に含まれる対象の間の射が $\mathbf{C}$ のものと一致するとき，$\mathbf{D}$ は充満部分圏である，と云われる．

Def. 4 (同型，骨格的)**.** 射 $f : A \to B \in \mathbf{C}$ が同型射である，とは

$${}^\exists g : B \to A \in \mathbf{C} \ \text{ s.t. } \ g \circ f = 1_A, \ f \circ g = 1_B$$

となることである．g は一意に定まるので f^{-1} と書く．また，この時対象 A と B は同型であると云い，$A \cong B$ と書く．

明らかに，任意の恒等射は同型射である．恒等射のように，ドメインとコドメインが同じ同型射を特に自己同型射と云う．同型射が自己同型射のみであるような圏は骨格的 （skeltal）であると呼ばれる．

また，$\mathbf{C}$ の任意の対象が部分圏 $\mathbf{D}$ の対象と同型であるとき，$\mathbf{D}$ は稠密な部分圏であると云う．

以下の議論では，ある圏内での同型に加え，さらに圏 $\mathbf{Cat}$ における同型，つまり対象を小さな圏とし射を函手とみたときの同型，圏同型を考える．

さて，本稿の主題である骨格の定義は次で与えられる．

Def. 5 (骨格)**.** 圏 $\mathbf{C}$ の稠密な充満部分圏であって骨格的であるような圏を，$\mathbf{C}$ の 骨格（skeleton）と呼ぶ．

詳しくは立ち入らないが，英語版 Wikipedia [7] から一部抜粋した骨格の例を以下に幾つか挙げる．

1. 集合全体を対象とし，その間の写像を射とする（大きな）圏 $\mathbf{Sets}$ の同型射は全単射写像である．したがって，その骨格は基数全体を対象とする部分圏である．

2. $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間を対象，その間の線型写像を射とする圏 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ の骨格は，任意次元のユークリッド空間を対象とする部分圏である．

3. 整列集合と単調写像からなる圏の骨格は，順序数を対象とする部分圏である．

4. プレ順序集合を圏と見做すと，その骨格は半順序集合となる．

2.2 選択公理

会の趣旨から，選択公理の主張そのものについては既知とする．選択公理については様々な同値な言い換えが存在するが，ここでは，下記の定義を採用することにする．

Def. 6 (選択公理)**.** 任意の非空集合の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，その直積

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \left\{ f:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\middle|\; f(\lambda)\in X_\lambda \right\}$$

は空ではない．

2.2.1 選択公理の圏論的な言い換え

圏論において選択公理はどう表現されるのか？その紹介の為に更に幾つかの概念を紹介しておきたい．

Def. 7 (モノ射，エピ射)**.** 圏 $\mathbf{C}$ の射 $m:A\to B$ がモノ射であるとは，m が左簡約可能であること，即ち

$$m\circ f = m\circ g \Rightarrow f = g \quad {}^\forall f,g:C\to A$$

が成立することである．このとき $m:A\rightarrowtail B$ と書く．

また，射 $e:A\to B$ がエピ射であるとは，e が右簡約可能であること，即ち

$$f\circ e = g\circ e \Rightarrow f = g \quad {}^\forall f,g:B\to C$$

が成立することである．このとき $e:A\twoheadrightarrow B$ と書く．

集合圏 **Sets** でのエピ射，モノ射はそれぞれ全射，単射と一致する．これを使って，集合の要素に触れずに射や対象の言葉だけを用いた，選択公理の圏論的な言い換えが出来る．

特に，次の言い換えを以後の証明では用いる．

Prop. 1. 以下の命題は選択公理と同値．

Sets の任意のエピ射は右逆射を持つ．

Proof. (イ) <u>必要性.</u>

今，$e:A\twoheadrightarrow B$ を任意の全射とする．このとき選択公理を仮定して，e の右逆写像 $s:B\to A$ が存在し $e\circ s=1_B$ となることを示す．今，集合族 $(E_b)_{b\in B}$ を次で定める．

$$E_b = e^{-1}(\{b\})$$

ここで，e は全射より各 E_b は空ではない．よって選択公理より，

$$\prod_{b\in B} E_b \neq \emptyset$$

となる．そこで $s\in\prod_{b\in B}E_b$ を一つ取れば，

$$s:B\to\bigcup_{b\in B}E_b = A,\quad s(b)\in E_b \ {}^\forall b\in B$$

であり，

$$(e\circ s)(b)\in e(E_b) = e(e^{-1}(\{b\})) = \{b\}$$
$$\therefore (e\circ s)(b) = b,\ {}^\forall b\in B$$
$$\therefore e\circ s = 1_B$$

よって，e の右逆写像 $s:B\to A$ が存在する．

(ロ) <u>十分性.</u>

任意の全射 $e:A\twoheadrightarrow B$ に対し右逆写像 $s:B\to A$ が存在するとする．今，非空集合の族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，集合 A を次で定める．

$$A = \{\,(\lambda,x)\mid \lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda\,\}$$

ここで，写像

$$\begin{array}{ccc} f: A & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & \Lambda \\ \cup & & \cup \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

を考えると，明らかにこれは全射となっている．仮定より，この右逆写像 $s:\Lambda\to A$ が存在し，$f\circ s = 1_A$ となる．そこで，

$$h = \pi_2\circ s:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$$

とすれば，A の定義より特に $h(\lambda)\in A_\lambda$ となるので，これは正に族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対する選択函数であり，従って

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\emptyset$$

以上 (イ)(ロ) より，1 と選択公理の同値性が示された． ∎

この言い換えは，初等トポスによって集合を圏論的に定義する際に，選択公理に相当する要請として採用される，らしい．らしい，と云うのはそういう話が Mac Lane [3] や竹内 [2] に書いてあるのをちらっと読んだことがある，と云う程度の意味で，実際きちんと理解していると云う訳ではない，と云う意味である．

2.2.2 完全代表系

圏の骨格の存在証明において，選択公理が本質的な役割を演じるのは対象の同型関係に関する完全代表系を選ぶ場面である．そこで簡単の為，選択公理から完全代表系の存在を証明しておく．

Def. 8 (完全代表系)**.** S を集合，$\sim$ を S 上の同値関係とする．このとき，$S \supseteq A$ が S における $\sim$ の完全代表系であるとは，同値関係による自然な射影 $\pi : S \twoheadrightarrow S/\!\sim$ について，その A への制限 $\pi|_A : A \to S/\!\sim$ が全単射となることである．

Claim. 選択公理の下で，任意の集合 S とその上の同値関係 $\sim$ に対して，完全代表系 $A \subseteq S$ を取ることが出来る．

Proof. 今，$\pi : S \twoheadrightarrow S/\!\sim$ は全射であり，特に選択公理を仮定しているので命題 1 より右逆写像 $s : S/\!\sim \to S$ が存在し，$\pi \circ s = 1_{S/\sim}$ となる．また，特に s は単射である．

そこで，$A = s(S/\!\sim) \subseteq S$ ととり，制限写像 $\pi|_A : A \to S/\!\sim$ が全単射となることを示す．

全射性. $[c] \in S/\!\sim$ について，

$$\begin{aligned}\pi|_A(s([c])) &= \pi(s([c])) = (\pi \circ s)([c]) \\ &= 1_{S/\sim}([c]) = [c]\end{aligned}$$

となるので，明らかに全射である．

単射性. $a, a' \in A = s(S/\!\sim)$ で $a \neq a'$ とする．このとき，$^\exists[b], [b'] \in S/\!\sim$ s.t. $a = s([b])$, $a' = s([b'])$ と出来るから，s の単射性より $[b] \neq [b']$ となる．

他方、s は π の右逆写像であったから、

$$\begin{aligned}\pi|_A(a) &= \pi(s([b])) = (\pi \circ s)([b]) = 1_{S/\sim}([b]) \\ &= [b] \\ &\neq [b'] \\ &= 1_{S/\sim}([b']) = (\pi \circ s)([b']) = \pi(s([b'])) \\ &= \pi|_A(a')\end{aligned}$$

となり，従って $\pi|_A$ は単射である．

以上より、制限写像 $\pi|_A : A \to S/\!\sim$ が全単射となるので，A は完全代表系となる． ∎

2.3 圏の骨格

それではいよいよ，骨格の存在定理と選択公理の同値性を証明する．

Th. (骨格の存在定理)**.** 次の命題は選択公理と同値である．

> 任意の（小さな）圏 $\mathbf{C}$ に対し，その骨格が存在する．

Proof. (イ) <u>**A.C.** $\Rightarrow$ 骨格の存在</u>

$\mathbf{C}$ を小さな圏とする．今，$\mathbf{C}$ の対象全体の集合 C_0 に，同型による同値関係を入れる．すると，第 2.2.2 節の Claim より完全代表系をとれるので，その内の一つを $D_0 \subseteq C_0$ とする．ここで，圏 $\mathbf{D}$ を，D_0 の元を対象とする $\mathbf{C}$ の充満部分圏とする．即ち，$\mathbf{D}$ に属する任意の二つの対象について，$\mathbf{C}$ でその二つの間に存在する射を全て取ってきて $\mathbf{D}$ の射とする．これは明らかに恒等射を含み，合成について閉じているので部分圏であり，充満性も明らかである．また，D_0 の取り方から，$\mathbf{C}$ の対象は必ず $\mathbf{D}$ に同型な対象を持つので，$\mathbf{D}$ は稠密である．

さて，$A, B \in \mathbf{D}$, $A \cong B$ とする．このとき同値類の取り方から $A \in \pi|_{D_0}(A)$ かつ $B \in \pi|_{D_0}(A)$ となる．従って $\pi|_{D_0}(A) \cap \pi|_{D_0}(B) \neq \emptyset$ であり，特に各 $\pi|_{D_0}(A), \pi|_{D_0}(B)$ は同値類であるので，同値類の性質から $\pi|_{D_0}(A) = \pi|_{D_0}(B)$ となる．今，$\pi|_{D_0}$ は全単射より，従って $A = B$．ゆえに，$\mathbf{D}$ の同型な対象は全て自分自身に限られるので，$\mathbf{D}$ は骨格的である．

今，$\mathbf{D}$ は $\mathbf{C}$ の稠密な充満部分圏であったから，これと併せて $\mathbf{D}$ は $\mathbf{C}$ の骨格となる．

(ロ) 骨格の存在 $\Rightarrow$ **A.C.**

ここでは，直接選択公理を示すのではなく，命題 1 を示す．すなわち，$e : A \twoheadrightarrow B$ が与えられているとき，$^\exists s : B \rightarrowtail A$ s.t. $e \circ s = 1_B$ とできることを示す．

ここで，e に対し圏 $\mathbf{C}_e$ を次で定める．

対象． 各 $a \in A$ に対し $(e(a), a)$ の形の順序対．

射． $^{\exists!}(e(a), a) \to (e(a'), a') \iff e(a) = e(a')$ とする．

恒等射． $e(a) = e(a)$ $^\forall a \in A$ より上の射の定めかたから一意に存在する $(e(a), a) \to (e(a), a)$ を $(e(a), a)$ の恒等射とする．

合成． 二つの射 $(e(a), a) \to (e(b), b)$, $(e(b), b) \to (e(c), c)$ があれば，定義より $e(a) = e(b) = e(c)$ となり射 $(e(a), a) \to (e(c), c)$ が一意的に存在するので，これを合成射とする．

射の一意性からただちに単位律・結合律は従うので，これは圏となる．また特に，任意の 2 対象の間の射は明らかに同型射となっている．何故ならば，$e(a) = e(b) \iff e(b) = e(a)$ より，射 $(e(a), a) \to (e(b), b)$ が存在すれば $(e(b), b) \to (e(a), a)$ が存在し，これらの合成は定義から $(e(a), a) \to (e(a), a)$, $(e(b), b) \to (e(b), b)$ となるが，これらもまた射の一意性より恒等射となるためである．

特に，A, B は集合であるので，$\mathbf{C}_e$ は小さな圏となる．よって，骨格の存在定理が使え，$\mathbf{C}_e$ の骨格を取れる．そこで，その一つを $\mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)$ とし，写像 $s : B \rightarrowtail A$ のグラフを

$$G(s) = |\mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)| = \{\ (b, a) \in \mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)\ \} \subseteq B \times A$$

で定める．これにより s が実際に写像となることを見る．

まず，$e : A \twoheadrightarrow B$ は全射より，$^\forall b \in B$ に対し $e(a) = b$ $(^\exists a \in A)$ と出来，$(b, a) \in \mathbf{C}_e$ $(^\exists a \in A)$ が成立する．今，$\mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)$ は稠密であるので，$\mathbf{C}_e$ の対象 (b, a) は必ず $\mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)$ 内に同型な対象を持つ．従って，任意の $b \in B$ について

$$(b, a) \in \mathrm{sk}(\mathbf{C}_e) \quad (^\exists a \in A)$$

としてよい．

そこで，$b \in B$ を任意にとり，

$$(b, a), (b, a') \in \mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)$$

とする．今，$\mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)$ は $\mathbf{C}_e$ の部分圏であるので，対象の定め方から $e(a) = b = e(a')$ となる．よって定義より同型射 $(b, a) \xrightarrow{\sim} (b, a')$ が存在する．今，特に $\mathrm{sk}(\mathbf{C}_e)$ は骨格的であるので，$(b, a) = (b, a')$ となり，従って $a = a'$ が云える．よって，グラフ $G(s)$ は任意の $b \in B$ に対して唯一つの $a \in A$ を対応づける．従って，$s : B \to A$ は写像となる．

すると，s の定義より特に $(b, s(b)) \in \mathbf{C}_e$ となり，$\mathbf{C}_e$ の定義から $b = e(s(b))$ $^\forall b \in B$ となる．よって，$e \circ s = 1_B$ となるので，s が e の右逆写像となっていることが示せた．

以上 (イ)(ロ) より，圏の骨格の存在定理と選択公理の同値性が示された． ∎

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category Theory*. No. 52 in Oxford Logic Guide. Oxford University Press, second edition, 2010.

[2] 竹内外史. 層・圏・トポス—現代的集合像を求めて. 日本評論社, 1978.

[3] S. Mac Lane. 圏論の基礎. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 三好 博之, 高木 理 訳.

[4] 檜山正幸. 骨格的な圏と圏の骨格 - 檜山正幸のキマイラ飼育記. http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20101102/1288676747, 11 2010.

[5] skeleton in nlab. http://nlab.mathforge.org/nlab/show/skeleton.

[6] Axiom of choice - wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice.

[7] Skeleton (category theory) - wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Skeleton_(category_theory).