代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2013 年 07 月 15 日

Exercise 4-11

四葉バラ曲線は，極座標を用いて $r = \sin(2\theta)$ で定義される．デカルト座標系では $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ と表される．

(a) 原点を通る直線の大半は多重度 4 でバラと交わることを示せ．幾何的にはどういうことか？

(b) 4 より大きな多重度で交わる直線を見付け，その数字の幾何的な意味を説明せよ．

今までと同様に計算すれば,

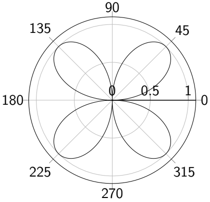
$$g(t) = t^4((c^6 + d^6)t^2 + 3(c^4d + cd^4)t - c^2d^2)$$

を分析すればよい．$cd \neq 0$ の時，直線はちょうど重複度 4 で交わることがわかる．$c = 0$ のときは $d \neq 0$ に注意すれば $g(t) = d^6t^6$ となり重複度 6 である．これは y-軸に相当する．また，$d = 0$ の時も同様に重複度 6 で，これは x-軸に相当する．

演習問題 II

よって以上より，大半の直線は原点において重複度 4 で曲線と交わることがわかった．これは，大半の原点を通る直線は曲線と接さないということである．

ここで，四葉バラ曲線は次のような曲線である．



演習問題 III

x 軸，y 軸はそれぞれ，二つの曲線と接するとみることが出来る．その分の寄与が $2 \times 2 = 4$ で，残りの二つとは接さないので，合計重複度が 6 となる．また，どの接線についても，微小距離だけ動かすと四本の曲線と交わることもわかる．更に，定義式の低次の項に注目すると $-16x^2y^2$ であり，これは原点の近傍では x-軸，y-軸それぞれ二本ずつになっているということがわかる．よって重複度四.

演習問題 IV

Exercise 4-12 (曲面の特異点)

$f \in k[x, y, z]$ により定義される曲面 $V(f) \subseteq k^3$ について考える．

(a) $(a, b, c) \in V(f)$ が特異点であることの定義を与えよ．

(b) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の特異点を全て決定せよ．ちゃんと意味のある答えは出るか？

(c) 曲面 $V = V(x^2 - y^2 z^2 + z^3)$ の特異点を全て決定せよ．テキストのグラフと関連づけてみよ．

(a) $(a, b, c) \in V(f)$ が特異点であるとは，
$\nabla f(a, b, c) = (f_x(a, b), f_y(a, b), f_z(a, b)) = (0, 0, 0)$ となることである．

演習問題 V

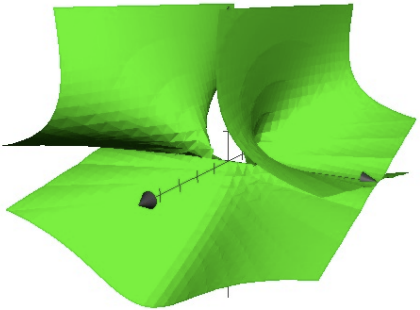
(b) 円周の場合と同様，$\nabla f(x,y,z)=0$ となるのは $x=y=z=0$ となるときだけだが，これは球面上の点ではないので，特異点を持たない．この結果は，幾何的な直観と一致する．つまり，どの点に対しても一意に接平面が決定されるだろうという予想を裏切らない．

(c) $\nabla f(x,y,z)=(2x,-2yz^2,-2y^2z+3z^2)$ である．この零点を求めよう．$I=\langle x, yz^2, 3z^2-2y^2z\rangle$ とおいて Gröbner 基底を求めれば，

$$G=\{\,z^3, yz^2, 3z^2-2y^2z, x\,\}$$

となる．よって x,y を消去できたので，$z=x=0$ かつ y は任意というのが $\nabla f=0$ の解であることがわかる．この条件を満たす点は，一つ残らず V 上の点であるので，y-軸上の点は全て V の特異点となる．これは，教科書のグラフを見ると，二つの「曲面」が y-軸上で交わっているように見えることとも一致する．

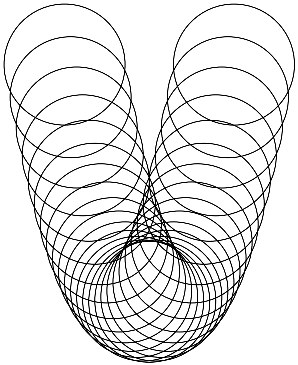
演習問題 VI



包絡線 I

- 幾何的に見えやすいように $\mathbb{R}$ 上で考える
- 包絡線……与えられた全ての曲線の同時に接するような曲線

$t \in \mathbb{R}$ として $(x-t)^2 + (y-t^2) = 4$ で定義される曲線を考える．t をパラメタと見れば，放物線上に半径 2 の円が並ぶ曲線族と見做せる．



包絡線 II

Def. 4 (曲線族)

多項式 $F \in \mathbb{R}[t, x, y]$ が与えられたとき，実数 $t \in \mathbb{R}$ を一つ固定した $\mathbb{R}^2$ での曲線を $V(F_t)$ で表すことにする．このとき，t を $\mathbb{R}$ 上変化させて得られる代数的集合 $V(F_t)$ の全体を，F で決定される曲線族 と呼ぶ.

- t は「パラメタ」であり,「どの曲線に注目しているか」.
- 厳密には「代数的集合の族」と云うべきだが，幾何的な状況を強調し,「曲線族」と呼ぶ.

これを踏まえて，包絡線を次のように定義する：

包絡線 III

Def. 5 (包絡線)

$\mathbb{R}^2$ の曲線族 $V(F_t)$ が与えられたとき，次の性質を満たす点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の全体を $V(F_t)$ の包絡線と呼ぶ.

$$\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

包絡線の素朴な正当化 I

ここでは直観的な包絡線の概念との対応を素朴な方法で「正当化」する（厳密にやるにはもっとやる必要がある）.
仮定：包絡線 C が

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

によりパラメトライズされているとする．任意の時刻 t で, $(f(t), g(t))$ が曲線 $V(F_t)$ 上にあってほしい.

$$\rightsquigarrow F(f(t), g(t), t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

（？）接するにはどうすればよいか？
微積分：

- C の時刻 t における接ベクトル：$(f'(t), g'(t))$
- $\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F)$ は $V(F_t)$ の接線に対し垂直

$\longrightarrow$ $(f'(t), g'(t))$ は常に ∇F に垂直でなくてはならない！

包絡線の素朴な正当化 II

よって，$(f'(t), g'(t)) \cdot \nabla F = 0$ でなくてはならない：

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t), t)f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t), t)g'(t) = 0 \tag{4.2}$$

以上から，(4.1) および (4.2) により包絡線が決定されることがわかった．ここで，(4.1) の両辺を微分してみると，

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t), t)f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t), t)g'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(f(t), g(t), t) = 0 \tag{4.3}$$

が得られる．そこで，(4.3) から (4.2) を引けば，

$$\frac{\partial F}{\partial t}(f(t), g(t), t) = 0 \tag{4.4}$$

が得られる．以上を用いて一応の正当化が出来た．

包絡線のまとめ

- 包絡線の議論を，幾分素朴に「正当化」した．(上手くいかない例は後程)
- 定義 5 の主な結果は，$V(F_t)$ の包絡線は方程式

$$\begin{cases} F(x,y,t)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=0 \end{cases}$$

で与えられるということ．

x, y　包絡線上の「何処」にいるか？
t　族の中のどの曲線に接しているか？

$\longrightarrow$ 包絡線の定義式を得るには，t を消去する必要がある

$\longrightarrow$ 消去理論！

簡単な例（演習問題14） I

Exercise 4-14

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 - y + t$$

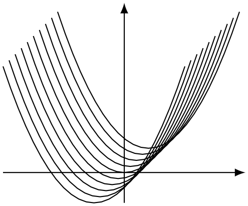
により定義される曲線族を考える．これは，標準放物線 $y = x^2$ を直線 $y = x$ に沿って動かしたものである．

(a) 包絡線は明らかに傾き 1 の直線である．微積分を用いて，この包絡線が $y = x - 1/4$ であることを示せ．

(b) 定義に基づいて包絡線を計算せよ．

(c) 時刻 t で $(f(t), g(t))$ が $V(F_t)$ 上にあるような直線のパラメータ表示を求めよ．

簡単な例（演習問題 14） II



(a) 直線の方程式を $L: y = x + b$ として，これが各放物線と接する条件を求める．$y - t = (x - t)^2$ と連立すると，交点は

$$x^2 - (1 + 2t)x + (t^2 + t - b) = 0$$

を満たすことがわかる．これが重根を持つ条件を求めると，$b = -1/4$ であることがわかる．このとき，上の方程式に $b = -1/4$ を代入すれば，$x = t + 1/2$ となることがわかる．このとき $y = t + 1/4$ であり，ここでの接線は確かに $y = x - 1/4$ になっていることがわかる．

簡単な例（演習問題14） III

(b) $F(x,y,t) = (x-t)^2 - y + t, \partial_t F(x,y,t) = 2(t-x)+1$ であるので，これらが生成するイデアルの Gröbner 基底を求めれば次のようになる：

$$G = \left\{ g_1 = x - y - \frac{1}{4}, g_2 = t - y + \frac{1}{4} \right\}$$

よって，曲線族 $V(F_t)$ の族は $V(x-y-1/4)$ に含まれていることがわかる．特に $\mathrm{LC}_t(g_2) = 1$ より $\mathbb{C}$ 上で包絡線と $V(g_1)$ は一致し，更に g_2 を t について解けば $t = y - 1/4$ となるので，$\mathbb{R}$ 上でも $y = x - 1/4$ となっていることがわかる．

(c) 上で求めた Gröbner 基底より，$y = t + 1/4, x = x + 1/2$ と置けばよさそう．実際，上で求めたように $F(t + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{4}, t) = 0$ となる．

もうすこし複雑な例 I

最初に掲げた $(x-t)^2+(y-t^2)^2=4$ の例を考える．上の定義に倣えば，包絡線は

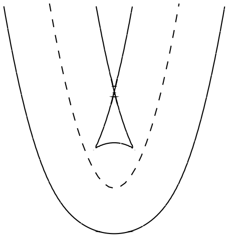
$$\begin{cases} F(x,y,t)=(x-t)^2+(y-t^2)^2-4 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=2(t-x)-4t(y-t^2)=0 \end{cases}$$

により説明される．$t>x>y$ なる lex 順序で Gröbner 基底を計算すると，$G_1=I\cap\mathbb{R}[x,y]$ の生成元として

$$\begin{aligned} g_1 = {} & 16x^6+16x^4y^2-40x^4y-191x^4-32x^2y^3-96x^2y^2 \\ & +30x^2y+688x^2+16y^4-136y^3+225y^2+544y-1156 \end{aligned}$$

が取れることがわかる．よって，包絡線は $V(g_1)$ に含まれている．

もうすこし複雑な例 II



最初の絵からは見えづらかった「三角形」の部分が現れている．
円を幾つか描いてみると，これも包絡線の一部であると解る．

- ⋆ 包絡線と $V(g_1)$ は一致するか？
  1. $V(g_1)$ の全ての点が包絡線に含まれるだろうか？
     i.e. 部分解 (x, y) はいつでも完全解 (t, x, y) に延長されるか？
  2. 包絡線上の点は幾つの円周と接するのか？
     i.e. 拡張される (x, y) に対し，対応する t は幾つあるか？

もうすこし複雑な例 III

- 先頭項係数が定数となる生成元があるので，$\mathbb{C}$ 上なら完全解に延びることがわかる．

$\longrightarrow$ t は複素解かもしれない！

- 拡張定理の限界：解があっても，違う体にあるかもしれない．
- それでも，今回はまだわかることがある！

$$g_5 = 135t^2 + (32xy^2 + 40xy + 26x)t$$
$$- (16x^4 + 16x^2y^2 - 8x^2y - 111x^2 + 16y^3 - 32y^2 - 64y + 128)$$

に注目すると，これは二次式なので，$g_5 = 0$ の解 (x, y) は高々二つの拡張解 (t, x, y) に延びる．

- つまり，包絡線の各点は高々二つの円と接する！
- 二つの円に接しそうな点はどこか？交点の辺りで二つの円と接しそう．他にはあるか？

$\longrightarrow$ Gröbner 基底を使って調べてみよう！

もうすこし複雑な例 IV

五つの Gröbner 基底のうち，$g_2 \sim g_4$ は t について一次の項しか含まない．そこで次のように書かれているとする：

$$g_i = A_i(x,y)t + B_i(x,y) \quad i = 2,\ldots,4, A_i, B_i \in \mathbb{R}[x,y]$$

もし少なくとも一つの $A_i(x,y)$ が消えなければ，$\quad t = -\dfrac{B_i(x,y)}{A_i(x,y)}$ と解くことが出来る．また，(x,y) が実解なら，それに対応する $t \in \mathbb{R}$ が一意に決まってくれることもわかる．

$\rightsquigarrow$ $V(A_2, A_3, A_4)$ 上にない点は常にただ一つの円周と接する！

- A_2, A_3, A_4 が消える場合はどうだろうか？
  - (!) 実は，今回の場合その点は特異点と一致する！

もうすこし複雑な例 V

Gröbner 基底によるイデアル所属判定法を使えば,

$$g_1, \frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y} \in \langle A_2, A_3, A_4 \rangle$$

$$A_2^2, A_3^2, A_4^2 \in \left\langle g_1, \frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y} \right\rangle$$

となることが示せる（演習問題 18）. 後の問題で示すが, この特異点は,

$$(0, 4.25), (\pm 0.936845, 1.63988)$$

の三つであることもすぐにわかる.

もうすこし複雑な例 VI

Exercise 4-15

(a) 各特異点に接する二つの円周を描け.

(b) 特異点 $(0, 4.25) = (0, 17/4)$ に対し，この点で接する円周に対応する t を求めよ.

(c) 特異点は正確には $(\pm\sqrt{15 + 6\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{4}}/2, \frac{1}{2}(-1 + 6\sqrt[3]{2}))$ であることを示せ.

(a) 省略.

(b) g_5 に $(x, y) = (0, 17/4)$ を代入すると，$t = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ となる.

もうすこし複雑な例 VII

(c) $J = \langle A_2, A_3, A_4 \rangle$ とおいて，この Gröbner 基底を調べると，

$$G = \left\{ \begin{aligned} h_1 &= 256y^4 - 896y^3 - 768y^2 - 1928y + 7327 \\ h_2 &= 64xy^3 + 48xy^2 + 12xy - 431x \\ h_3 &= 288x^2 - 64y^3 + 336y^2 - 108y - 697 \end{aligned} \right\}$$

となる．ここで，

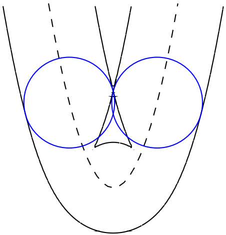
$$h_1 = (64y^3 + 48y^2 + 12y - 431)(4y - 17)$$

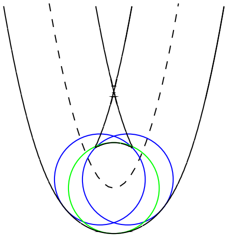
なので，それぞれの場合について考える．

$y = 17/4$ の時　このとき $\bar{J} = \langle x \rangle$ より，$x = 0$．よって $(0, 17/4)$ は一つの特異点．

もうすこし複雑な例 VIII

$64y^2 + 48y^2 + 12y - 431 = 0$ の時　この実解を求めると，$y = \frac{1}{4}(-1 + 6\sqrt[3]{2})$ である．これを h_2 に代入するとゼロ．そこで h_3 を h_1 で割った余りを考えると $h_3' = 12x^2 + 16y^2 - 4y - 47$．これを解けば $x = \pm\sqrt{15 + 6\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{4}}/2$.





まとめ

- $V(g_1)$ の非特異点は包絡線に含まれ，ただ一つの円周と接する．
- 特異点に接する円周が描けるので，特異点では二つの円周と接する．特異点は面白い！
    - 特異点は「悪い点」というわけではなく，何か特別なことが起きていることを教えてくれる．
- 定義式は簡単に書けるが，それよりちょっと複雑な Gröbner 基底をみないとわからないことが沢山ある！
- ここでの取り扱いは幾分素朴
    - 包絡線に特異点がある．特異点で「接する」とは？
    - 他にも，次の問題で扱うようにここでの定義は単純すぎる

包絡線がうまくいかない例 I

Exercise 4-19

(a) 中心が x 軸上を動く半径一の円からなる曲線族を考える．絵を描いてみることで，包絡線が $y = \pm 1$ であることを示せ．

(b) 定義 5 を使って，$F = (x - t)^2 + y^2 - 1$ の包絡線を求めてみよ．

(c) 定義 5 を使って，$F = (x - t^3)^2 + y^2 - 1$ の包絡線を求めてみよ．曲線族の中の演習の一つが包絡線に含まれてしまっていることがわかるだろう．t^3 によって $t = 0$ 付近で「寄り集まる」ことが出来るようになってしまったので，$V(F_0)$ が包絡線に含まれてしまったのである．

(a) 略

包絡線がうまくいかない例 II

(b) Gröbner 基底を求めると， $G = \{g_1 = y^2 - 1, g_2 = t - x\}$ となるので，包絡線は $y = \pm 1$ に含まれることがわかる．また，$\mathrm{LC}_t(g_2) = 1$ であり，また g_2 が t に関する一次式であることから，任意の部分解が完全解に延びることもわかる．よって，包絡線は $y = \pm 1$ である．

(c)

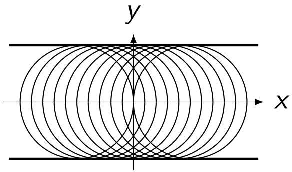
$$G' = \left\{ \begin{array}{l} g'_1 = x^2y^2 - x^2 + y^4 - 2y^2 + 1 \\ g'_2 = t^2y^2 - t^2 \\ g'_3 = t^3x - x^2 - y^2 + 1 \\ g'_4 = t^5 - t^2x \end{array} \right\}$$

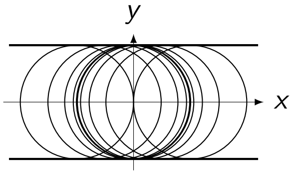
となり，$g'_1 = (y+1)(y-1)(x^2+y^2-1)$ と分解できる．g'_4 より任意の部分解は完全解に延び，特に五次式なので少なくとも一つの実解を持つ．よって，包絡線は，

$$V(g'_1) = V(y+1) \cup V(y-1) \cup V(x^2+y^2-1)$$

包絡線がうまくいかない例 III

- 直観的な議論で正当化した際に，包絡線は 時刻 t で $(f(t), g(t))$ が $V(F_t)$ 上にあると仮定していた．
- これは，自身と異なるような族の曲線と接することを前提としていた
- (c) ではその分が足りなかった．





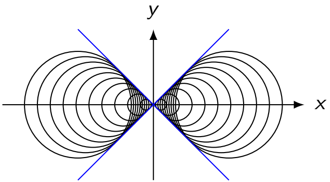
Exercise 4-16

$$F = (x-t)^2 + y^2 - \frac{1}{2}t^2$$

包絡線を求めよ．

上の結果を絵に描いて説明せよ．

$I = \langle F, \partial_t F = 2(t-x) - t \rangle$ の Gröbner 基底を求めると，
$G = \{g_1 = x^2 - y^2, t - 1/2\}$ となる．基底をみれば明らかに
$x^2 = y^2$ が F の包絡線と一致することがわかる．図はだいたい次のような形になる：



Exercise 4-17

$(x-t)^2+(y-t^2)^2=t^2$ の包絡線の方程式を計算し，二つの代数多様体の和で表せることを示せ．どの点で幾つの曲線と接するか？

$I=\langle F,\partial_t F\rangle$ の Gröbner 基底 G を計算すると，かなり複雑な式が出て来る．特に
$I_1=\langle x(-16x^4-16x^2y^2+72x^2y+27x^2+64y^3)\rangle$ となる．

$$V(I_1)=V(x)\cup V(f=16x^5+16x^3y^2-72x^3y-27x^3-64xy^3)$$

となり，二つの集合に別れることがわかった．
接する円の個数を考えよう．g_7 を見ると，$\mathbb{C}$ 上では常に完全解に延びることがわかる．$V(x)$ 上と $V(f)$ 上の場合に分けて考える．
$x=0$ のとき．$x=0$ を代入すると，$\overline{g_5}=2y(t^2-y)$ と
$g_7=2t(t^2-y)$ が生き残る． g_5 から $y<0$ の時は包絡線に含まれない．$y>0$ の時は g_5 を解けば $t=\pm\sqrt{y}$ の二つの円と接することがわかり，$y=0$ の時は g_7 から $t=0$ が唯一の接円となる．

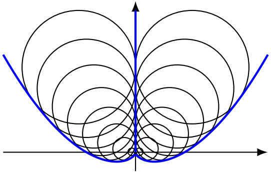
演習問題 III

$16x^5 + 16x^3y^2 - 72x^3y - 27x^3 - 64xy^3) = 0$ のとき．上の場合を考えれば，$x \neq 0$ としてよい．g_2, g_3 を見ると，t についての最高次係数は $4y + 9$ を含む．特に $\mathrm{LT}_t(g_3) = x^2(4y+9)t$ なので，$4y + 9 \neq 0$ ならば t は x, y に対してただ一つだけ決まることがわかる．また，$4y + 9 = 0$ のときは，$\overline{g_5} = x(4x^2 + 27)$ となり，$x = 0$ とならざるを得ないので， $x = 0$ の場合に帰着される．
以上より，

原点 唯一つの「曲線」 $(0, 0)$ と接する

y-軸正の部分 二つの曲線と接する

$V(f)$ 上 唯一つの曲線と接する



演習問題 IV

Exercise 4-21 (曲線族の特異点)

(a) $\mathbb{R}^2$ の曲線族で，特異点を持つ曲線に対応する接線を見付ける方法を述べよ．

(b) 上の方法を $F = xy - t$ により定まる曲線族に適用せよ．

(a)
1. $\langle F, \partial_x F, \partial_y F \rangle$ の t-消去順序による Gröbner 基底を求める
2. $G_1 = G \cap \mathbb{R}[x, y]$ の実根を求め，それが実完全解に延びるか調べる

(b) $I = \langle xy - t, x, y \rangle$ Gröbner 基底を求めると，$G = \{x, y, t\}$ となる．すなわち $(0, 0, 0)$ が求める完全解であり，このとき特異点を持つ．$t = 0$.