

# 代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部  
数学科四年

2013年 11月 13日

## 剰余環の次元と零点の個数の関係 I

- 剰余環のベクトル空間としての次元は、零点の個数と密接に関係する。

### Th. 10

$I \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{X}]$  : 零次元イデアル,  $A = \mathbb{C}[\mathbf{X}]/I$  とするとき,  
 $|V(I)| \leq \dim_{\mathbb{C}}(A)$ . 特に,  $I = \sqrt{I} \Leftrightarrow |V(I)| = \dim_{\mathbb{C}}(A)$  となる.

証明には次の補題を用いる：

### Lemma 9

$$S = \{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$$

$$\implies (\exists g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]), g_i(p_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

## 剰余環の次元と零点の個数の関係 II

補題の証明のあらまし；演習問題 11. まず， $S$  上の任意の点で異なる値を取るような線型多項式  $l(x_1, \dots, x_n)$  を構成する．特に，今は  $\mathbb{C}^n$  上で考えているので， $\mathbb{C}^n$  の位相を用い， $l(p)$  の値が  $p$  の第一座標の十分近傍に入るように  $l$  を構成する事を考える．

$n$  に関して帰納的に  $l$  を構成する．

$n = 1$  の時は  $S$  の値はみな異なるので， $l(x_1) = x_1$  と置けば題意を満たす．

$n = k$  の時所望の線型多項式が得られるとして， $n = k + 1$  の時を考える．もし  $S$  の第一座標の値が皆異なるのなら，

$l(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = x_1$  とすれば良い．

## 剰余環の次元と零点の個数の関係 III

そうでない場合を考える. 第一座標を消去した  $\pi_1[S]$  に帰納法の仮定を適用し, 得られた線型多項式を  $\bar{l}(p)$  と置く. 次のように  $l(p)$  を定める:

$$d = \min_{a_{i1} \neq a_{j1}} \frac{|a_{i1} - a_{j1}|}{3}, \quad M = \max_{p \in S} |\bar{l}(p)|$$
$$l(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = x_1 + \frac{d}{M} \bar{l}(x_2, \dots, x_{k+1})$$

こうすれば, 第一座標ごとに適当な代表元を選んでおけば, 第一座標を共有する点同士はその  $d$ -近傍内に入り, 異なる物同士の距離は  $2d$  以上になるので,  $l$  は  $S$  上の点でみな異なる値を取る. この時,  $g_i$  は次で与えられる:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{j \neq i} (l(x_1, \dots, x_n) - l(p_j))}{\prod_{j \neq i} (l(p_i) - l(p_j))} \quad \blacksquare$$

## 剰余環の次元と零点の個数の関係 IV

以上を用いて、定理を示す。

定理の証明.  $V(I) = \{p_1, \dots, p_m\}$  とおく。そこで、

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{C}[\mathbf{X}]/I & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ [f] & \longmapsto & (f(p_1), \dots, f(p_m)) \end{array}$$

により  $\varphi$  を定める。  $[f] = [g]$  とすると  $f - g \in I$  より  $(f - g)(p_i) = 0$  となるので、この写像は well-defined であり、定め方から明らかに線型である。定理の前半の主張を示すには、これが全射であることを示せばよい。  $g_1, \dots, g_m$  を上の補題を  $V(I)$  に適用したものとする。すると、  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$  に対し、  $f = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$  とおけば、  $\varphi([f]) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  となる。よって、  $|V(I)| = m = \dim \mathbb{C}^m \leq \dim A$ .

## 剰余環の次元と零点の個数の関係 V

後半の部分を示す. まず  $I = \sqrt{I}$  とする.  $\varphi$  が全単射であることを示す. そこで  $f(p_i) = 0 (\forall i)$  とすると, 零点定理より  $f \in I(V(I)) = \sqrt{I} = I$  となる. よって  $\ker \varphi = 0$  となるから,  $\varphi$  は単射である. 全射であることは既に示したので,  $\varphi$  は全単射であり,  $|V(I)| = \dim A$  となる.

逆に  $\dim(A) = |V(I)| = m$  とすれば, 上の  $\varphi$  は全単射となる. これを用いて  $I = \sqrt{I}$  を示す. 特に  $\sqrt{I} \subseteq I$  を示せば十分である. そこで,  $f(p_i) = 0$  とすると,  $\varphi([f]) = 0$  であるので,  $[f] \in \ker \varphi$  となる.  $\varphi$  は線型同型だから,  $[f] = 0$  となり, 従って  $f \in I$  である. ■

## 根基イデアルに関する剰余環

### Exercise 2-12

定理 2.10 と同様,  $S = \{p_1, \dots, p_m\}$  およびその代入による線型写像  $\varphi$  が与えられているとする.

- (b)  $\mathbb{C}^m$  を直積環と見做したとき,  $\varphi$  が環準同型になることを示せ.
- (c)  $\varphi$  が環同型  $\Leftrightarrow I = \sqrt{I}$

### Proof.

- (b)  $\varphi([f][g]) = \varphi([fg]) = ((fg)(p_1), \dots, (fg)(p_m)) = (f(p_1), \dots, f(p_m))(g(p_1), \dots, g(p_m)).$
- (c) 前回定理の証明時に  $I = \sqrt{I}$  と  $\varphi$  が全単射であることの同値性は示した. よって OK. ■

★ 重要なことは, 根基イデアルに関する剰余環は単に直積環だと見做せる, ということ.

## 根基イデアルの判定法 I

### Exercise 2-17

$I \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{X}]$  をイデアルとする. 各  $1 \leq i \leq n$  について,  $p_i(x_i) \in I$  となるような *square-free* な  $p_i \in \mathbb{C}[x_i]$  が存在するなら,  $I = \sqrt{I}$  となることを, 命題 2.7 を使って示せ.

ここで, 命題 7 は次のような主張だった:

### Prop. 7

$I \subseteq k[\mathbf{X}]$ : 零次元イデアル,  $k = \bar{k}$

$p_i : I \cap k[x_i]$  の生成元  $p_{i,red} : p_i$  の *square-free part*

$$\Rightarrow \sqrt{I} = I + \langle p_{1,red}, \dots, p_{n,red} \rangle$$



## 根基イデアルの判定法 II

Proof.

$p_i \in I \cap k[x_i] = \langle q_i \rangle$  とする. 仮定より  $p_i \in \langle q_i \rangle$  であり,  $p_i$  は square-free である.  $q_i | p_i$  より  $q_i$  は square-free でなくてはならない. したがって  $q_{i,red} = q_i$  である.  
すると, 命題 7 より,

$$\begin{aligned}\sqrt{I} &= I + \langle q_{i,red} \mid 1 \leq i \leq n \rangle \\ &= I + \langle q_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle \\ &= I\end{aligned}$$

よって  $I$  は根基イデアルとなる. ■

## 根基イデアルの判定法 III

### Exercise 2-8

イデアル  $I = \langle x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y, xy^2 - x, y^3 - y \rangle$  が根基であることを示せ.

### Proof.

$\mathbb{C}[\mathbf{X}]/I$  の基底を求め、それを用いて  $p_1, p_2$  を求めると、

$$p_1 = x^4 - 2x^2 - x^2 + 2x \quad p_2 = y^3 - y$$

よって、根基イデアルは

$\sqrt{I} = I + \langle p_{1,red}, p_{2,red} \rangle = I + \langle x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x, y^3 - y \rangle$  となる。ここで、 $y^3 - y \in I$  は明らかであり、 $\overline{p_{1,red}}^G = 0$  より  $p_{1,red} \in I$  であるので、 $I = \sqrt{I}$  となる。 ■

## 根基イデアルの判定法 IV

- 零次元イデアルが根基イデアルか否かの判定は次のようにして出来る：
  - ①  $I$  の基底を求め、それを使って  $k[\mathbf{X}]/I$  の基底  $B$  を求める.
  - ②  $p_1, \dots, p_n$  を求める
  - ③ 生成元の情報や所属判定アルゴリズムを用い、 $p_{i,red} \in I$  かどうかをチェックする
- 零次元イデアルの根基イデアルの計算も、必要なだけ  $p_{i,red}$  を足して Gröbner 基底を足せばよいだけ
- 連立方程式系を解くに当っては、まず根基を求めてそれから種々の計算を行えばよい. その際、演算は更に簡単な直積環のものを考えればよくなる.