

初等部分構造を用いた Erdős-Rado の定理の証明

石井大海

2018-03-05

※ これは研究室でのゼミ資料を一部改変して公開したものである。

1 定義と準備

以下では、初等部分構造を用いた議論をするので、まずその準備をしておく：

Def. 1. $\kappa \geq \omega$ とする. M が κ -closed $\Leftrightarrow [M]^{<\kappa} \subseteq M$

補題 1. $\theta > \kappa \geq \omega$ とする. $S \in [H(\theta)]^{\leq 2^\kappa}$ とおくと, $M \preceq H(\theta)$ で次を満たすものが存在する：

- (1) $S \subseteq M$
- (2) M は κ^+ -closed
- (3) $|M| = 2^\kappa$

Proof. Löwenheim-Skolem の定理より $M_0 \preceq H(\theta)$ で $S \subseteq M_0$ かつ $|M_0| = |S| = 2^\kappa$ を満たすものが取れる. $M_\alpha \preceq M_\beta \preceq H(\theta), |M_\alpha| = 2^\kappa$ ($\alpha < \beta < \kappa^+$) なる初等鎖を構成できれば, $M = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} M_\alpha$ が求める物となる. まず, α が極限順序数の時には $M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ と置けば, 初等鎖定理より $\beta < \alpha \rightarrow M_\beta \preceq M_\alpha$ となり, 濃度の条件も OK. つづいて $\alpha = \beta + 1$ とする. この時, $(2^\kappa)^{<\kappa^+} = (2^\kappa)^{\leq \kappa} = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$ に注意すれば, $S_\alpha = M_\beta \cup [M_\beta]^{<\kappa^+}$ の濃度は 2^κ である. そこで Löwenheim-Skolem の定理により $S_\alpha \subseteq M_\alpha \preceq H(\theta), |M_\alpha| = 2^\kappa$ なる M_α を取れば良い. \square

Def. 2. $\kappa \geq \lambda, \sigma$ を基数, $n < \omega$ とする. この時,

$$\kappa \rightarrow (\lambda)_\sigma^n \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f : [\kappa]^n \rightarrow \sigma \exists Z \in [\kappa]^\lambda \forall A, B \in [Z]^n [f(A) = f(B)]$$

各 f に対する Z を, 分割 f に関する **等質集合** (homogeneous set) と呼ぶ.

- 注意.**
- $\kappa' \geq \kappa, \lambda' \leq \lambda, \sigma' \leq \sigma, \kappa \rightarrow (\lambda)_\sigma^n \implies \kappa' \rightarrow (\lambda')_{\sigma'}^n$
 - ここでは無限組合せ論的性質を見たいので, $\kappa, \lambda \geq \omega$ の場合だけを考える
 - $\lambda > \kappa$ の時は $[\kappa]^\lambda = \emptyset$ となり自明.
 - $\sigma \geq \kappa$ の時は, $[\kappa]^n \xrightarrow{id} \sigma$ を考えれば明らかに偽. よって以下 $\sigma < \kappa$ とする.
 - $n = 0$ の時は自明

補題 2. $\kappa \geq \lambda \geq \omega$ の時, 次が成立:

$$\kappa \rightarrow (\lambda)_\sigma^1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma < \text{cf}(\kappa) & (\kappa = \lambda) \\ \sigma < \kappa & (\kappa > \lambda) \end{cases}$$

Proof. $n = 1$ のとき, $\kappa \rightarrow (\lambda)_\sigma^1$ は次と同値であることが判る:

$$\forall f: \kappa \rightarrow \sigma \exists \alpha < \sigma (|f^{-1}[\{\alpha\}]| \geq \lambda)$$

まずは $\kappa = \lambda$ の時を考え, 対偶を示す. $\sigma \geq \text{cf}(\kappa)$ の時, $A = \{a_\alpha : \alpha < \sigma\} \in [\kappa]^\sigma$ を κ の共終部分集合とする. $f: \kappa \rightarrow \sigma$ を $f(\alpha) = \min\{\gamma \mid \alpha \leq a_\gamma\}$ により定める. すると, 各 $\gamma < \sigma$ に対し $|f^{-1}[\{\gamma\}]| \leq |a_\gamma| < \kappa$ となるので $\kappa \nrightarrow (\kappa)_\sigma^1$. 逆に $\kappa \nrightarrow (\kappa)_\sigma^1$ とする. $f: \kappa \rightarrow \sigma$ を $|f^{-1}[\{\beta\}]| < \kappa$ を満たすようなものとする. この時 $\kappa = \bigcup_{\beta < \sigma} f^{-1}[\{\beta\}]$ より $\sigma \geq \text{cf}(\sigma)$ となる. よって示された.

今度は $\lambda < \kappa$ とし対偶を示す. $\sigma = \kappa$ とすると, 恒等関数 $id: \kappa \rightarrow \kappa$ を考えれば $f^{-1}[\{\alpha\}] = \{\alpha\}$ より $\kappa \nrightarrow (\lambda)_\kappa^1$ である. 逆に, $\kappa \nrightarrow (\lambda)_\sigma^1$ とし, $f: \kappa \rightarrow \sigma$ が $|f^{-1}[\{\alpha\}]| < \lambda$ を満たすとする.

$$\kappa = \left| \bigcup_{\beta < \sigma} f^{-1}[\{\beta\}] \right| = \max \left\{ \sigma, \sup_{\beta < \sigma} |f^{-1}[\{\beta\}]| \right\}$$

ここで $|f^{-1}[\{a\}]| < \lambda$ より $\sup_{\alpha < \sigma} |f^{-1}[\{\alpha\}]| \leq \lambda < \kappa$ となる事に注意すれば, $\kappa = \sigma$ となる. □

よって, $n = 0, 1$ の時の $\kappa \rightarrow (\lambda)_\sigma^n$ はかなり簡単になるので, 興味があるのは $n \geq 2$ の時である. 次は Ramsey による古典的な結果である. 本筋の命題ではないので, 証明は概略に留める:

定理 1 (Ramsey). $\forall n, k < \omega [\omega \rightarrow (\omega)_k^n]$

証明の概略. n に関する帰納法で示す. $n = 0$ は先程の議論より自明. n の時成立を仮定し, $n + 1$ の場合を考える. $f: [\omega]^{n+1} \rightarrow k$ を固定し, 各 $x \in \omega$ に対し, $f_x: [\omega \setminus \{x\}]^n \rightarrow k$ を $f_x(A) = f(A \cup \{x\})$ により定める. 次を満たす $H_\ell \in [\omega]^\omega, x_\ell < \omega, i_\ell < k$ を帰納的に構成する:

(a) $H_\ell \supseteq H_{\ell+1}$

$$(b) \{x_\ell : \ell \leq n\} \cap H_n = \emptyset$$

$$(c) x_\ell \in H_{\ell-1} (\ell \geq 1)$$

$$(d) f_{x_\ell} [[H_\ell]^n] = \{i_\ell\}$$

すると, $L = \{\ell < \omega : i_\ell = i\}$ が無限集合になるような $i < k$ が少なくとも一つ存在する. この時, $H = \{x_\ell : \ell \in L\}$ が求めるものとなる. \square

よって特に $\omega \rightarrow (\omega)_2^\omega$ では, 等質集合の濃度が非可算となるような, 即ち $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^\omega$ が成り立つような κ はどんなものがあるだろうか? 実は $(2^\omega)^+$ で十分である:

定理 2. $(2^\omega)^+ \rightarrow (\omega_1)_2^\omega$. よって特に $(2^\omega)^+ \rightarrow (\omega_1)_2^\omega$.

これは次の Erdős-Rado の定理で $n = 1, \kappa = \omega$ とおけば直ちに従う:

定理 3 (一般化 Erdős-Rado). $\kappa \geq \omega$ とする.

$$\exp_0(\kappa) = \kappa, \exp_{n+1}(\kappa) = 2^{\exp_n(\kappa)}$$

と表すとき, 次が成立:

$$(\exp_n(\kappa))^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^{n+1}$$

Proof. n に関する帰納法で証明する. $n = 0$ の時は $\kappa^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^1$ であり, $\kappa < \kappa^+ = \text{cf}(\kappa^+)$ なので補題 2 より成立.

$n + 1$ の場合を考える. 以後, 簡単の為 $\exp_n(\kappa) = \chi_n$ と略記する. 帰納法の仮定は,

$$(\chi_n)^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^{n+1}$$

である. $f : [\chi_{n+1}^+]^{n+2} \rightarrow \kappa$ を固定し, $Z \in [\chi_{n+1}^+]^{\kappa^+}$ で f について等質となるものを得たい. そこで, まず $f, \chi_{n+1}^+ \in H(\theta), \kappa \subseteq H(\theta)$ を満たす十分大きな $\theta > \omega$ を取り, その χ_n^+ -closed な初等部分構造 $M \preceq H(\theta)$ で $f, \chi_{n+1}^+ \in M$ かつ $\kappa \subseteq M$ となるものを取る. 補題 1 より, 特に $|M| = 2^{\chi_n} = \chi_{n+1}$ とできる. すると, $|M \cap \chi_{n+1}^+| \leq \chi_{n+1}$ となり, χ_{n+1}^+ の正則性より $j = \sup^+(\chi_{n+1}^+ \cap M) \in \chi_{n+1}^+$ が取れる.

以下, 各 $\xi < \chi_n^+$ に対し,

$$\forall \eta < \xi [i_\eta < i_\xi] \wedge \forall \eta_0, \dots, \eta_n < \xi [f(\{i_{\eta_0}, \dots, i_{\eta_n}, i_\xi\}) = f(\{i_{\eta_0}, \dots, i_{\eta_n}, j\})]$$

を満たすよう帰納的に $\langle i_\xi \in \chi_{n+1}^+ \cap M \mid \xi < \chi_n^+ \rangle$ を定めたい. そこで, ξ 未満まで出来たとし, $D = \{i_\eta : \eta < \xi\} \subseteq M \cap \chi_{n+1}^+$ とおく. この時 $|D| = |\xi| < \chi_n^+$ なので, M の χ_n^+ -closed 性から $D \in M$ となる. また, M は有限部分集合について閉じるから, $D \subseteq M$ より $[D]^{n+1} \subseteq M$ となり, 更に $|[D]^{n+1}| = |D| < \chi_n^+$ から $[D]^{n+1} \in M$ も云える. そこで, $g : [D]^{n+1} \rightarrow \kappa$ を $g(A) = f(A \cup \{j\})$ により定める. すると, $\kappa \subseteq M$ となるように取っており, $H(\theta)$ で ZFC-P (特に対の公理) が成り立つことから $[D]^{n+1} \times \kappa \subseteq M$. よって

$g \subseteq [D]^{n+1} \times \kappa \subseteq M$ となり, 特に $|g| < \chi_n^+$ だからみたば M の χ_n^+ -closed 性より $g \in M$ が言える. 今,

$$H(\theta) \models \exists y \in \chi_{n+1}^+ [\forall i \in D (i < y) \wedge \forall A \in [D]^{n+1} (f(A \cup \{y\}) = g(A))]$$

が成立する (y として j が取れる). この右辺の論理式に現れるパラメータ $\chi_{n+1}^+, D, [D]^{n+1}, f, g$ は全て M の元であり, $M \vDash H(\theta)$ であるので, M でも成立する. そこで i_ξ としてそのような y を取れば良い.

$W = \{i_\xi : \xi < \chi_n^+\}$ と置く. この時 $f_j(A) = f(A \cup \{j\})$ により $f_j : [W]^{n+1} \rightarrow \kappa$ を定める. 帰納法の仮定を分割 f_j と W に適用すれば, $Z \in [W]^{\kappa^+}, \alpha < \kappa$ で $f_j[[Z]^{n+1}] = \{\alpha\}$ となるような物が取れる. この時, $A = \{i_{\xi_0} < \dots < i_{\xi_n} < i_{\xi_{n+1}}\} \in [Z]^{n+2}$ ($\xi_k < \xi_{k+1}$) を任意に取れば,

$$f(A) = f(\{i_{\xi_0}, \dots, i_{\xi_n}, i_{\xi_{n+1}}\}) = f(\{i_{\xi_0}, \dots, i_{\xi_n}, j\}) = f_j(\{i_{\xi_0}, \dots, i_{\xi_n}\}) = \alpha$$

ここで $A = \{i_{\xi_0}, \dots, i_{\xi_{n+1}}\}$ の取り方は任意なので, Z は f について等質であることが示せた. \square

2 関連する問題

2.1 $(2^\omega)^+$ が最小であること

上での議論から, $\kappa \geq (2^\omega)^+$ ならば $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^2$ が成立することがわかる. この値は最小なのだろうか? 次の Sierpinski の議論から, 2^ω では不十分であり, この結果が optimal であることがわかる:

補題 3 (Sierpinski). $2^\omega \not\rightarrow (\omega_1)_2^2$

より一般に, 次が成り立つ:

補題 4 (Sierpinski). $\kappa \geq \omega$ に対し, $2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)_2^2$. よって特に $2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)_\kappa^2$.

Proof. 問題になるのは濃度だけなので, ${}^\kappa 2$ を考える. $<$ を ${}^\kappa 2$ 上の辞書式順序, \triangleleft を ${}^\kappa 2$ 上のある整列順序とする. この時, 関数 $f : [{}^\kappa 2]^2 \rightarrow 2$ を次で定義する:

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 0 & (x < y \Leftrightarrow x \triangleleft y) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

もし分割 f に関する等質集合 $Z \in [{}^\kappa 2]^{\kappa^+}$ が存在したとすれば, Z は辞書式順序 $<$ またはその逆順序 $>$ により整列され, 特に κ^+ -型の昇鎖または降鎖を含むことになる. 次の主張を示せば証明は完了する:

Claim 1. $\kappa \geq \omega$ とする. ${}^\kappa 2$ は辞書式順序 $<$ に関する κ^+ -型の降鎖・昇鎖を持たない.

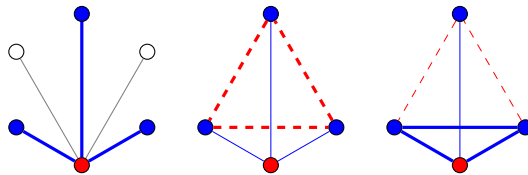
昇鎖でも降鎖でも議論は同じなので、以下昇鎖の場合を考える。 $\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ を $f_\alpha < f_\beta$ ($\alpha < \beta$) を満たす κ^2 の昇鎖とする。この時、 $\gamma \leq \kappa$ を $\{f_\alpha \upharpoonright \gamma : \alpha < \kappa^+\}$ が濃度 κ^+ となるような最小の物とする。そこで、最初の昇鎖は $f_\alpha \upharpoonright \gamma = f_\beta \upharpoonright \gamma \Rightarrow f_\alpha = f_\beta$ を満たすとして一般性を失わない。

各 $\alpha < \kappa^+$ に対し、 $f_\alpha \upharpoonright \xi_\alpha = f_{\alpha+1} \upharpoonright \xi_\alpha$ かつ $f_\alpha(\xi_\alpha) = 0, f_{\alpha+1}(\xi_\alpha) = 1$ となるような ξ_α を取る。これは辞書式順序の定義から一意に定まる。 $\gamma \leq \xi_\alpha$ とすると $f_\alpha \upharpoonright \xi_\alpha \neq f_{\alpha+1} \upharpoonright \xi_\alpha$ となってしまうので、 $\xi_\alpha < \gamma$ であることに注意しよう。この時、 κ^+ の正則性より $A = \{\alpha < \kappa^+ : \xi_\alpha = \xi\}$ の濃度が κ^+ になるような $\xi < \gamma < \kappa^+$ が取れる。 $\alpha, \beta \in A$ かつ $f_\alpha \upharpoonright \xi = f_\beta \upharpoonright \xi$ とする。このとき $\xi = \xi_\alpha = \xi_\beta$ なので、 $f_{\alpha+1} \upharpoonright \xi_\beta = f_{\alpha+1} \upharpoonright \xi_\alpha = f_\alpha \upharpoonright \xi_\alpha = f_\beta \upharpoonright \xi_\beta$ となる。また ξ_α の取り方より $f_{\alpha+1}(\xi_\beta) = 1$ である。このような条件を満たす δ の中で $\beta+1$ は最小なので、 $\beta+1 \leq \alpha+1$ となる。同様の議論により $\alpha+1 \leq \beta+1$ となり、従って $\alpha = \beta$ となる。よって、 $\{f_\alpha \upharpoonright \xi : \alpha \in A\}$ の濃度は κ^+ である。しかし、これは γ の最小性に反する。□

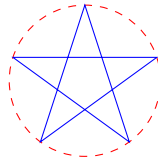
2.2 有限組合せ論

$\kappa, \lambda < \omega$ の場合は (有限) 組合せ論の非自明な問題である。以下に二つだけ例を挙げる：

- $6 \rightarrow (3)_2^2$ は成立する



- $5 \nrightarrow (3)_2^2$: 次の図が反例 (どの三角形も異なる色の辺を含む) :



参考文献

- [1] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. 3rd. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002. ISBN: 978-3-540-44085-7.
- [2] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.
- [3] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.
- [4] 田中一之, 坪井明人, and 野本和幸. ゲーデルと 20 世紀の論理学 (ロジック) 2 完全性定理とモデル理論. Ed. by 田中一之. Vol. 2. ゲーデルと 20 世紀の論理学. 東京大学出版会, 2011.
- [5] 根上生也. *グラフ理論 3 段階*. Vol. 2. アウト・オブ・コース. 遊星社, 1990.