初等部分構造を用いたErdős-Radoの定理の証明

石井大海

2022-04-16

※これは研究室でのゼミ資料を一部改変して公開したものである．

1 定義と準備

以下では，初等部分構造を用いた議論をするので，まずその準備をしておく：

Def. 1. $\kappa \geq \omega$ とする．M が κ-*closed* $\Leftrightarrow [M]^{<\kappa} \subseteq M$

補題 1. $\theta > \kappa \geq \omega$ とする．$S \in [H(\theta)]^{\leq 2^\kappa}$ とおくと，$M \preccurlyeq H(\theta)$ で次を満たすものが存在する：

(1) $S \subseteq M$
(2) M は κ^+-closed
(3) $|M| = 2^\kappa$

Proof. Löwenheim-Skolem の定理より $M_0 \preccurlyeq H(\theta)$ で $S \subseteq M_0$ かつ $|M_0| = |S| = 2^\kappa$ を満たすものが取れる．$M_\alpha \preccurlyeq M_\beta \preccurlyeq H(\theta), |M_\alpha| = 2^\kappa$ $(\alpha < \beta < \kappa^+)$ なる初等鎖を構成できれば，$M = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} M_\alpha$ が求める物となる．まず，α が極限順序数の時には $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ と置けば，初等鎖定理より $\beta < \alpha \to M_\beta \preccurlyeq M_\alpha$ となり，濃度の条件も OK．つづいて $\alpha = \beta + 1$ とする．この時，$(2^\kappa)^{<\kappa^+} = (2^\kappa)^{\leq\kappa} = 2^{\kappa\kappa} = 2^\kappa$ に注意すれば，$S_\alpha = M_\beta \cup [M_\beta]^{<\kappa^+}$ の濃度は 2^κ である．そこで Löwenheim-Skolem の定理により $S_\alpha \subseteq M_\alpha \preccurlyeq H(\theta), |M_\alpha| = 2^\kappa$ なる M_α を取れば良い． □

Def. 2. $\kappa \geq \lambda, \sigma$ を基数，$n < \omega$ とする．この時，

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_\sigma \overset{\text{def}}{\iff} \forall f : [\kappa]^n \to \sigma \, \exists Z \in [\kappa]^\lambda \, \forall A, B \in [Z]^n \, [f(A) = f(B)]$$

各 f に対する Z を，分割 f に関する**等質集合** (*homogeneous set*) と呼ぶ．

注意.
- $\kappa' \geq \kappa, \lambda' \leq \lambda, \sigma' \leq \sigma, \kappa \longrightarrow (\lambda)^n_\sigma \Longrightarrow \kappa' \longrightarrow (\lambda')^n_{\sigma'}$
- ここでは無限組合せ論的性質を見たいので，$\kappa, \lambda \geq \omega$ の場合だけを考える
- $\lambda > \kappa$ の時は $[\kappa]^\lambda = \emptyset$ となり自明.
- $\sigma \geq \kappa$ の時は，$[\kappa]^n \xrightarrow{\sim} \kappa \xrightarrow{id} \sigma$ を考えれば明らかに偽．よって以下 $\sigma < \kappa$ とする.
- $n = 0$ の時は自明

補題 2. $\kappa \geq \lambda \geq \omega$ の時，次が成立：

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)^1_\sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma < \mathrm{cf}(\kappa) & (\kappa = \lambda) \\ \sigma < \kappa & (\kappa > \lambda) \end{cases}$$

Proof. $n = 1$ のとき，$\kappa \longrightarrow (\lambda)^1_\sigma$ は次と同値であることが判る：

$$\forall f : \kappa \to \sigma \, \exists \alpha < \sigma \, (|f^{-1}[\{\alpha\}]| \geq \lambda)$$

まずは $\kappa = \lambda$ の時を考え，対偶を示す．$\sigma \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ の時，$A = \{ a_\alpha : \alpha < \sigma \} \in [\kappa]^\sigma$ を κ の共終部分集合とする．$f : \kappa \to \sigma$ を $f(\alpha) = \min \{ \gamma \mid \alpha \leq a_\gamma \}$ により定める．すると，各 $\gamma < \sigma$ に対し $|f^{-1}[\{\gamma\}]| \leq |a_\gamma| < \kappa$ となるので $\kappa \nrightarrow (\kappa)^1_\sigma$．逆に $\kappa \nrightarrow (\kappa)^1_\sigma$ とする．$f : \kappa \to \sigma$ を $|f^{-1}[\{\beta\}]| < \kappa$ を満たすようなものとする．この時 $\kappa = \bigcup_{\beta < \sigma} f^{-1}[\{\beta\}]$ より $\sigma \geq \mathrm{cf}(\sigma)$ となる．よって示された.

今度は $\lambda < \kappa$ とし対偶を示す．$\sigma = \kappa$ とすると，恒等関数 $id : \kappa \to \kappa$ を考えれば $f^{-1}[\{\alpha\}] = \{\alpha\}$ より $\kappa \nrightarrow (\lambda)^1_\kappa$ である．逆に，$\kappa \nrightarrow (\lambda)^1_\sigma$ とし，$f : \kappa \to \sigma$ が $|f^{-1}[\{\alpha\}]| < \lambda$ を満たすとする.

$$\kappa = \left| \bigcup_{\beta < \sigma} f^{-1}[\{\beta\}] \right| = \max \left\{ \sigma, \sup_{\beta < \sigma} \left| f^{-1}[\{\beta\}] \right| \right\}$$

ここで $|f^{-1}[\{a\}]| < \lambda$ より $\sup_{\alpha < \sigma} |f^{-1}[\{\alpha\}]| \leq \lambda < \kappa$ となる事に注意すれば，$\kappa = \sigma$ となる. □

よって，$n = 0, 1$ の時の $\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_\sigma$ はかなり簡単になるので，興味があるのは $n \geq 2$ の時である．次は Ramsey による古典的な結果である．本筋の命題ではないので，証明は概略に留める：

定理 1 (Ramsey). $\forall n, k < \omega \, [\omega \longrightarrow (\omega)^n_k]$

証明の概略. n に関する帰納法で示す．$n = 0$ は先程の議論より自明．n の時成立を仮定し，$n + 1$ の場合を考える．$f : [\omega]^{n+1} \to k$ を固定し，各 $x \in \omega$ に対し，$f_x : [\omega \setminus \{x\}]^n \to k$ を $f_x(A) = f(A \cup \{ x \})$ により定める．次を満たす $H_\ell \in [\omega]^\omega, x_\ell < \omega, i_\ell < k$ を帰納的に構成する：

(a) $H_\ell \supseteq H_{\ell+1}$

(b) $\{ x_\ell : \ell \leq n \} \cap H_n = \emptyset$

(c) $x_\ell \in H_{\ell-1}\,(\ell \geq 1)$

(d) $f_{x_\ell}[[H_\ell]^n] = \{i_\ell\}$

すると，$L = \{ \ell < \omega : i_\ell = i \}$ が無限集合になるような $i < k$ が少なくとも一つ存在する．この時，$H = \{ x_\ell : \ell \in L \}$ が求めるものとなる． □

よって特に $\omega \longrightarrow (\omega)^2_2$．では，等質集合の濃度が非可算となるような，即ち $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2_2$ が成り立つような κ はどんなものがあるだろうか？ 実は $(2^\omega)^+$ で十分である：

定理 2. $(2^\omega)^+ \longrightarrow (\omega_1)^2_\omega$．よって特に $(2^\omega)^+ \longrightarrow (\omega_1)^2_2$．

これは次の Erdős-Rado の定理で $n = 1, \kappa = \omega$ とおけば直ちに従う：

定理 3 (一般化 Erdős-Rado). $\kappa \geq \omega$ とする．

$$\exp_0(\kappa) = \kappa, \exp_{n+1}(\kappa) = 2^{\exp_n(\kappa)}$$

と表すとき，次が成立：

$$(\exp_n(\kappa))^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

Proof. n に関する帰納法で証明する．$n = 0$ の時は $\kappa^+ \longrightarrow (\kappa^+)^1_\kappa$ であり，$\kappa < \kappa^+ = \mathrm{cf}(\kappa^+)$ なので補題 2 より成立．

$n+1$ の場合を考える．以後，簡単の為 $\exp_n(\kappa) = \chi_n$ と略記する．帰納法の仮定は，

$$(\chi_n)^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

である．$f : [\chi^+_{n+1}]^{n+2} \longrightarrow \kappa$ を固定し，$Z \in [\chi^+_{n+1}]^{\kappa^+}$ で f について等質となるものを得たい．そこで，まず $f, \chi^+_{n+1} \in H(\theta), \kappa \subseteq H(\theta)$ を満たす十分大きな $\theta > \omega$ を取り，その χ^+_n-closed な初等部分構造 $M \preccurlyeq H(\theta)$ で $f, \chi^+_{n+1} \in M$ かつ $\kappa \subseteq M$ となるものを取る．補題 1 より，特に $|M| = 2^{\chi_n} = \chi_{n+1}$ とできる．すると，$|M \cap \chi^+_{n+1}| \leq \chi_{n+1}$ となり，χ^+_{n+1} の正則性より $j = \sup^+(\chi^+_{n+1} \cap M) \in \chi^+_{n+1}$ が取れる．

以下，各 $\xi < \chi^+_n$ に対し，

$$\forall \eta < \xi\,[i_\eta < i_\xi] \wedge \forall \eta_0, \ldots, \eta_n < \xi\,[f(\{i_{\eta_0}, \ldots, i_{\eta_n}, i_\xi\}) = f(\{i_{\eta_0}, \ldots, i_{\eta_n}, j\})]$$

を満たすよう帰納的に $\left\langle i_\xi \in \chi^+_{n+1} \cap M \,\middle|\, \xi < \chi^+_n \right\rangle$ を定めたい．そこで，ξ 未満まで出来たとし，$D = \{ i_\eta : \eta < \xi \} \subseteq M \cap \chi^+_{n+1}$ とおく．この時 $|D| = |\xi| < \chi^+_n$ なので，M の χ^+_n-closed 性から $D \in M$ となる．また，M は有限部分集合について閉じるから，$D \subseteq M$ より $[D]^{n+1} \subseteq M$ となり，更に $|[D]^{n+1}| = |D| < \chi^+_n$ から $[D]^{n+1} \in M$ も云える．そこで，$g : [D]^{n+1} \to \kappa$ を $g(A) = f(A \cup \{j\})$ により定める．すると，$\kappa \subseteq M$ となるように取っており，$H(\theta)$ で $\mathrm{ZFC} - \mathrm{P}$（特に対の公理）が成り立つことから $[D]^{n+1} \times \kappa \subseteq M$．よって

$g \subseteq [D]^{n+1} \times \kappa \subseteq M$ となり，特に $|g| < \chi_n^+$ だからみたび M の χ_n^+-closed 性より $g \in M$ が言える．今，

$$H(\theta) \models \exists y \in \chi_{n+1}^+ \ \left[\forall i \in D\,(i < y) \wedge \forall A \in [D]^{n+1}\,(f(A \cup \{y\}) = g(A))\right]$$

が成立する（y として j が取れる）．この右辺の論理式に現れるパラメータ $\chi_{n+1}^+, D, [D]^{n+1}, f, g$ は全て M の元であり，$M \preccurlyeq H(\theta)$ であるので，M でも成立する．そこで i_ξ としてそのような y を取れば良い．

$W = \{\, i_\xi : \xi < \chi_n^+ \,\}$ と置く．この時 $f_j(A) = f(A \cup \{j\})$ により $f_j : [W]^{n+1} \to \kappa$ を定める．帰納法の仮定を分割 f_j と W に適用すれば，$Z \in [W]^{\kappa^+}, \alpha < \kappa$ で $f_j[[Z]^{n+1}] = \{\alpha\}$ となるような物が取れる．この時，$A = \{i_{\xi_0} < \cdots < i_{\xi_n} < i_{\xi_{n+1}}\} \in [Z]^{n+2}$ $(\xi_k < \xi_{k+1})$ を任意に取れば，

$$f(A) = f(\{i_{\xi_0}, \ldots, i_{\xi_n}, i_{\xi_{n+1}}\}) = f(\{i_{\xi_0}, \ldots, i_{\xi_n}, j\}) = f_j(\{i_{\xi_0}, \ldots, i_{\xi_n}\}) = \alpha$$

ここで $A = \{\, i_{\xi_0}, \ldots, i_{\xi_{n+1}} \,\}$ の取り方は任意なので，Z は f について等質であることが示せた． $\square$

2　関連する問題

2.1　$(2^\omega)^+$ が最小であること

上での議論から，$\kappa \geq (2^\omega)^+$ ならば $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2_2$ が成立することがわかる．この値は最小なのだろうか？次の Sierpinski の議論から，2^ω では不十分であり，この結果が optimal であることがわかる：

補題 3 (Sierpinski). $2^\omega \not\rightarrow (\omega_1)^2_2$

より一般に，次が成り立つ：

補題 4 (Sierpinski). $\kappa \geq \omega$ に対し，$2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)^2_2$．よって特に $2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)^2_\kappa$．

Proof. 問題になるのは濃度だけなので，${}^\kappa 2$ を考える．$<$ を ${}^\kappa 2$ 上の辞書式順序，$\lhd$ を ${}^\kappa 2$ 上のある整列順序とする．この時，関数 $f : [{}^\kappa 2]^2 \to 2$ を次で定義する：

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 0 & (x < y \Leftrightarrow x \lhd y) \\ 1 & (otherwise) \end{cases}$$

もし分割 f に関する等質集合 $Z \in [{}^\kappa 2]^{\kappa^+}$ が存在したとすれば，Z は辞書式順序 $<$ またはその逆順序 $>$ により整列され，特に κ^+-型の昇鎖または降鎖を含むことになる．次の主張を示せば証明は完了する：

Claim 1. $\kappa \geq \omega$ とする．${}^\kappa 2$ は辞書式順序 $<$ に関する κ^+-型の降鎖・昇鎖を持たない．

昇鎖でも降鎖でも議論は同じなので，以下昇鎖の場合を考える．$\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ を $f_\alpha < f_\beta$ $(\alpha < \beta)$ を満たす ${}^\kappa 2$ の昇鎖とする．この時，$\gamma \le \kappa$ を $\{ f_\alpha \restriction \gamma : \alpha < \kappa^+ \}$ が濃度 κ^+ となるような最小の物とする．そこで，最初の昇鎖は $f_\alpha \restriction \gamma = f_\beta \restriction \gamma \Rightarrow f_\alpha = f_\beta$ を満たすとして一般性を失わない．

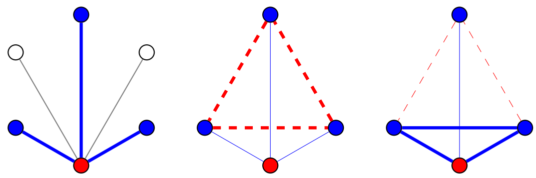
各 $\alpha < \kappa^+$ に対し，$f_\alpha \restriction \xi_\alpha = f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha$ かつ $f_\alpha(\xi_\alpha) = 0, f_{\alpha+1}(\xi_\alpha) = 1$ となるような ξ_α を取る．これは辞書式順序の定義から一意に定まる．$\gamma \le \xi_\alpha$ とすると $f_\alpha \restriction \xi_\alpha \ne f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha$ となってしまうので，$\xi_\alpha < \gamma$ であることに注意しよう．この時，κ^+ の正則性より $A = \{ \alpha < \kappa^+ : \xi_\alpha = \xi \}$ の濃度が κ^+ になるような $\xi < \gamma < \kappa^+$ が取れる．$\alpha, \beta \in A$ かつ $f_\alpha \restriction \xi = f_\beta \restriction \xi$ とする．このとき $\xi = \xi_\alpha = \xi_\beta$ なので，$f_{\alpha+1} \restriction \xi_\beta = f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha = f_\alpha \restriction \xi_\alpha = f_\beta \restriction \xi_\beta$ となる．また ξ_α の取り方より $f_{\alpha+1}(\xi_\beta) = 1$ である．このような条件を満たす δ の中で $\beta + 1$ は最小なので，$\beta + 1 \le \alpha + 1$ となる．同様の議論により $\alpha + 1 \le \beta + 1$ となり，従って $\alpha = \beta$ となる．よって，$\{ f_\alpha \restriction \xi : \alpha \in A \}$ の濃度は κ^+ である．しかし，これは γ の最小性に反する．

□

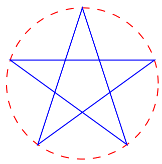
2.2 有限組合せ論

$\kappa, \lambda < \omega$ の場合は（有限）組合せ論の非自明な問題である．以下に二つだけ例を挙げる：

- $6 \longrightarrow (3)^2_2$ は成立する



- $5 \not\rightarrow (3)^2_2$：次の図が反例（どの三角形も異なる色の辺を含む）：



参考文献

[1] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* 3rd. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002. ISBN: 978-3-540-44085-7.

[2] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.

[3] Kenneth Kunen. *Set Theory.* Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.

[4] 田中一之, 坪井明人, and 野本和幸. **ゲーデルと *20* 世紀の論理学（ロジック）2 完全性定理とモデル理論**. Ed. by 田中一之. Vol. 2. ゲーデルと 20 世紀の論理学. 東京大学出版会, 2011.

[5] 根上生也. **グラフ理論 *3* 段階**. Vol. 2. アウト・オブ・コース. 遊星社, 1990.