Hausdorff Gap の証明

石井大海

2022-04-16

定理 1 (Hausdorff). ブール代数 $\mathfrak{P}\omega/\mathrm{Fin}$ について，次を満たす $\{a_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}, \{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ が存在する．

(1) $a_\alpha < a_\beta < b_\beta < a_\alpha$ $(\alpha < \beta < \omega_1)$

(2) $a_\alpha \leq b \leq b_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$ を満たすような $b \in \mathfrak{P}\omega/\mathrm{Fin}$ は存在しない．

以後，$[\quad] : \mathfrak{P}\omega \to \mathfrak{P}\omega/\mathrm{Fin}$ を標準写像とする．この定理の証明の為に，幾つかの命題を証明しておく．まず，次の事は簡単に確認出来る：

Fact 1. (i) $[A] = 1 \Leftrightarrow A$は補有限

(ii) $[A] \leq [B] \Leftrightarrow A \setminus B \in \mathrm{Fin}$

(iii) $[A] \neq [B] \Leftrightarrow A \mathbin{\triangle} B \notin \mathrm{Fin}$

補題 1. $a_n \leq a_{n+1} < 1$ $(n < \omega)$ ならば，$a_n \leq b < 1$ $(n < \omega)$ となるような b が存在する．

Proof. $[A_n] = a_n$ となるような $A_n \subseteq \omega$ を取る．次のようにして，$j_n < j_{n+1}$ を $A_i \cap [j_n, \omega) \subseteq A_n$ $(i < n)$ を満たすように再帰的に定める．

まず，$j_0 = 0$ とする．そこで j_n まで $A_i \cap [j_n, \omega) \subseteq A_n$ $(i < n)$ を満たすように取れているとして，j_{n+1} を作りたい．ここで,

$$j_{n+1} = \min \{\, j_n < j < \omega \mid A_n \cap [j, \omega) \subseteq A_{n+1} \,\}$$

により j_{n+1} を定めよう．もし右辺の集合が空集合であれば，どんな $j > j_n$ に対しても $A_n \cap [j, \omega) \subsetneq A_{n+1}$ となるので，$|A_n \setminus A_{n+1}| = \aleph_0$ となる．しかし，仮定より $[A_n] \leq [A_{n+1}]$ であったので，$A_n \setminus A_{n+1} \in \mathrm{Fin}$ でなくてはならず，矛盾．よって $n < \omega$ に対し常に題意を満たす j_n が取れる．

次に，$j_n \leq k_n, k_n < k_{n+1}$ $(n < \omega)$ を満たすように $k_n \notin A_n$ を構成したい．今，仮定より A_n は補有限ではないので，$\omega \setminus A_n$ は ω で非有界である．よって，このような k_n は常に取れる．

すると，$m > n$ なら $k_m \notin A_n$ が成立する．なぜなら，$m > n$ の時 $A_n \cap [j_m, \omega) \subseteq A_m$ であり，今 $j_m \leq k_m$

であったので $A_n \cap [k_m, \omega) \subseteq A_m$ である．ここで $k_m \in A_n$ とすると，$k_m \in A_n \cap [k_m, \omega) \subseteq A_m$ となるが，$k_m \in \omega \setminus A_m$ なので矛盾．

そこで，$A = \omega \setminus \{ k_n \mid n < \omega \}$ とおけば，$b = [A]$ が求めるものである．まず，構成から A は補有限でないので，$b = [A] < 1$ である．また，$A'_n = A_n \cap [k_n, \omega)$ とおけば，$A_n \setminus A'_n \subseteq [0, k_n) \in \mathrm{Fin}$ より $[A_n] \leq [A'_n]$．また $A'_n \subset A_n$ より $[A_n] \leq [A'_n]$．よって $[A_n] = [A'_n] = a_n$ である．$j \in A'_n$ とすると，$j > k_n$ かつ $j \neq k_m$ $(m > n)$．よって，$A'_n \subseteq \omega \setminus \{ k_n \mid n < \omega \}$ となるので，$a_n = [A_n] \leq [A] = b$ である． □

補題 2. $a_n \leq a_{n+1}, b_n \leq b_{n+1}, a_n \wedge b_n = 0$ $(n < \omega)$ ならば，$a_n \leq c$ かつ $b_n \wedge c = 0$ $(n < \omega)$ となる c が存在する．

Proof. $a_n = [A_n], b_n = [B_n]$ とする．$a_n \wedge b_n = 0$ より $A_n \cap B_n \in \mathrm{Fin}$ $(n < \omega)$ である．

そこで，

$$\left.\begin{array}{l} A_i \cap [j_n, \omega) \subseteq A_n \\ A_n \cap B_i \subseteq [0, j_n) \end{array}\right. \quad (i \leq n) \tag{*}$$

を満たすように $j_n < j_{n+1}$ を取りたい．まず，$A_n \cap B_n \in \mathrm{Fin}$ より，$A_0 \cap B_0 \subseteq [0, j_0)$ となるような最小の j_0 が取れる．この時，$A_0 \cap [j_0, \omega) \subseteq A_0$ は自明に成立しているので，$n = 0$ の時は OK．そこで，$(*)$ を満たす j_n が取れているとき，j_{n+1} を次のように定める：

$$j_{n+1} = \min \{ j_n < j < \omega \mid A_{n+1} \cap B_i \subseteq [0, j) \ (i < n+1), A_n \cap [j, \omega) \subseteq A_{n+1} \}$$

ここで，$A_{n+1} \cap B_i \subseteq [0, j)$ となるような j が取れることは補題 1 の証明で既に示した．また，$A_{n+1} \cap B_i \in \mathrm{Fin}$ $(i \leq n+1)$ だから，各 i に対し $\subseteq [0, j)$ となるような j が取れる．全順序性より二条件を満たすものは明らかに存在するので，j_{n+1} は well-defined である．以上から，$j_n < j_{n+1}$ が取れる．

ここで $A'_n = A_n \cap [j, \omega)$ とおくと，有限の差しかないので $[A'_n] = [A_n] = a_n$ である．そこで，

$$C = \bigcup \{ A'_n \mid n < \omega \} = \bigcup \{ A_n \cap [j_n, \omega) \mid n < \omega \}$$

として，$c = [C]$ とおけば，$a_n \leq c$ を満たす．また，

$$\begin{aligned} B_m \cap C &= \bigcup_{n<\omega} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \\ &= \bigcup_{n<m} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \cup \bigcup_{m \leq n < \omega} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \\ &\subseteq \bigcup_{n<m} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \cup \bigcup_{m \leq n < \omega} ([0, j_n) \cap [j_n, \omega)) \\ &\subseteq \bigcup_{n<m} (A_n \cap B_m) \in \mathrm{Fin} \end{aligned}$$

よって，$b_m \wedge c = 0$ $(m < \omega)$ も成立． □

補題 3. λ を無限順序数とする．$X \subseteq \omega, X_\alpha \subseteq \omega\ (\alpha < \lambda), [X] \le [Y]$ とする．このとき，もし任意の $k < \omega$ について $\{\, \alpha < \lambda \mid X_\alpha \cap X \subseteq k \,\}$ が有限なら，Y も同様の性質を満たす．

Proof. 対偶を示す．つまり，$[X] \le [Y]$ として，ある $k < \omega$ に対し，$Y \cap X_{\alpha_j} \subseteq k\ (j < \omega)$ を満たすような $\alpha_j < \omega$ が取れたとする．今，$[X] \le [Y]$ より $X \setminus Y \in \mathrm{Fin}$．そこで，$\ell = \sup^+(X \setminus Y) < \omega$ と置く．この時，

$$\begin{aligned} X \cap X_{\alpha_j} &= ((X \cap Y) \cup (X \setminus Y)) \cap X_{\alpha_j} \\ &= (X \cap Y \cap X_{\alpha_j}) \cup (X \setminus Y) \cap X_{\alpha_j} \\ &\subseteq k \cup \ell = \max(k, \ell) \end{aligned}$$

よって $m = \max(k, \ell)$ とおけば $\{\, \alpha < \lambda \mid X \cap X_\alpha \subseteq m \,\} \notin \mathrm{Fin}$ となる．よって示された． □

以上，三つの補題が，以下の証明において本質的な役割を果す．

定理の証明．以下を満たすように $A_\alpha, B_\alpha\ (\alpha < \omega_1)$ を帰納的に構成する：

(a) $[A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$
(b) $[A_\alpha] \wedge [B_\alpha] = 0$
(c) $[A_\alpha] < [A_\beta], [B_\alpha] < [B_\beta]\ (\alpha < \beta < \omega_1)$
(d) 各 $k < \omega, \beta < \omega_1$ に対し，$\{\, \alpha < \beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k \,\}$ は有限

$\alpha = 0$ の時は，$A_0 = B_0 = \emptyset$ とおけばよい．

α が後続順序数の時．$A_{\alpha+1}, B_{\alpha+1}$ を作ることを考える．$\beta < \alpha$ とすると，帰納法の仮定より $A_\alpha \cup B_\beta$ は補有限ではない．そこで，$\omega \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha) = \{\, n_k \mid k < \omega \,\}\ (\ell < k \Rightarrow n_\ell < n_k)$ として，

$$\begin{gathered} P = \{\, n_k \mid k \equiv 0 \pmod 3 \,\} \quad Q = \{\, n_k \mid k \equiv 1 \pmod 3 \,\} \\ A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup P \quad B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup Q \end{gathered}$$

とおく．このとき，$\omega \setminus (A_{\alpha+1} \cup B_{\alpha+1}) = \{\, n_k \mid k \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3) \,\}$ となるので，$[A_{\alpha+1}] \vee [B_{\alpha+1}] < 1$ である．よって条件 (a) は成立．また，条件 (b) についても，

$$\begin{aligned} A_{\alpha+1} \cap B_{\alpha+1} &= (A_\alpha \cup P) \cap (B_\alpha \cup Q) \\ &= (A_\alpha \cap B_\alpha) \cup \underbrace{(A_\alpha \cap Q)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(B_\alpha \cap P)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(P \cap Q)}_{=\emptyset} \\ &= A_\alpha \cap B_\alpha \in \mathrm{Fin} \end{aligned}$$

より $[A_{\alpha+1}] \wedge [B_{\alpha+1}] = 0$ となるので OK．

構成法より $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha = P, B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha = Q$ はいずれも無限集合なので，$[A_\alpha] < [A_{\alpha+1}], [B_\alpha] < [B_{\alpha+1}]$ である．帰納法の仮定より $[A_\beta] < [A_\alpha], [B_\beta] < [B_\alpha]\ (\beta < \alpha)$ が成立するので，これらを組み合わせれば $[A_\beta] < [A_{\alpha+1}], [B_\beta] < [B_{\alpha+1}]\ (\beta < \alpha + 1)$ となり，条件 () も成立．

最後に (d) が成立することを背理法により示そう．そこで，$\{\, \beta < \alpha + 1 \mid A_{\alpha+1} \cap B_\beta \subseteq k \,\}$ が無限となるような $k < \omega$ が存在したとする．この時，増大列 $\beta_n < \beta_{n+1}\ (n < \omega)$ であって $A_{\alpha+1} \cap B_{\beta_n} \subseteq k$ となるものが取れる．構成から $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1}$ であるので，$A_\alpha \cap B_{\beta_n} \subseteq k\ (n < \omega)$ となる．これは帰納法の仮定に反す

る．よって (d) も成立．以上より，α が後続順序数の時，条件 $(a) \sim (d)$ を満たすように A_α, B_α を作ることが出来る．

$\alpha = \beta$ が極限順序数の時．$\gamma < \beta$ のとき，帰納法の仮定の (a) および (c) と補題 1 から $[A_\gamma] \vee [B_\gamma] \leq [X] < 1$ $(\gamma < \beta)$ を満たす $X \subseteq \omega$ が取れる．同様に補題より

$$[A_\gamma] \leq [S], \quad [B_\gamma] \wedge [S] = 0 \qquad (\gamma < \beta) \tag{1}$$

を満たす S が取れ, 特に $S \subseteq X$ としてよい (特に $[X] \wedge [S]$ を考えれば, $[X] \wedge [S] \geq ([A_\gamma] \vee [B_\gamma]) \wedge [S] = [A_\gamma]$ であり，$[X] \wedge [S] \wedge [B_\gamma] = 0$ なので条件を満たす．また，$[X] \wedge [S] \subseteq [X]$ より $[S'] = [X] \wedge [S]$ で $S' \subseteq X$ を満たすような S' が取れる)．

補題 2 を使って A_β を定めたい．そこで，まずは $\beta = \omega$ の場合について，$[B_\gamma]$ について補題 2 の前提を満たす列 $S \subseteq [S_k]$ を作りたい：

$$\begin{cases} [S_k] \leq [S_{k+1}] & (k < \omega) \\ [B_n] \leq [B_{n+1}] & (n < \omega) \\ [S_n] \wedge [B_n] = 0 & (n < \omega) \end{cases} \tag{2}$$

今，$I_k = \{\, n < \omega \mid S \cap B_n \subseteq k \,\}$ $(k < \omega)$ とおき，これを用いて S を膨らませた列を作ることを考える．上の条件を満たす $[S_k]$ を得るため，$[S_k] \wedge [B_n] = 0$ かつ $\{\, n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq k \,\}$ が有限となるように $[S_k]$ を帰納的に定める．$k = 0$ の時は，$S_0 = S$ とすれば良い．そこで，S_k まで条件を満たすように構成出来たとして，S_{k+1} を作ろう．

I_k が有限集合の時は，$S_{k+1} = S_k$ とおく．I_k が無限集合の時を考える．$\{\, n < m \mid S \cap B_n \subseteq k \,\}$ は有限集合であるので，$\langle I_k, < \rangle$ は各始切片が有限集合であるような無限整列集合である．このような性質を持つ順序数は ω のみであるので，同型 $e : \omega \to I_k$ が取れ，特に e は狭義単調増加な全射である．更に，このとき $\sup \{\, e(n) \mid n < \omega \,\} = \omega$ である．これを示すには，e が全射であることから $\sup \{\, e(n) \mid n < \omega \,\} = \sup I_k$ となるので, $\sup I_k = \omega$ を示せばよい．もし $\sup I_k = m < \omega$ とすれば, 特に $I_k = \{\, n < m+1 \mid S \cap B_n \subseteq k \,\}$ と書けることになる．今, $m+1 < \omega$ であり, $(*)$ より I_k は有限集合となり, 仮定に反する．よって $\sup I_k = \omega$ となる．

さて，$[B_\alpha]$ に関する帰納法の仮定 (c) より $[B_n] < [B_{n+1}]$ $(n < \omega)$ である．よって，数学的帰納法により $0 < [B_{e(n)} \setminus \bigcup_{i<n} B_{e(i)}] \leq [X]$ となることがわかる．従って $B_{e(n)} \setminus \bigcup_{i<n} B_{e(i)}$ が無限なので，$p_n \in (B_{e(n)} \setminus \bigcup_{i<n} B_{e(i)}) \cap X$ を満たすような $n \leq p_n$ が取れ，特に $p_n < p_{n+1}$ とできる．そこで，$S_{k+1} = \{\, p_k \mid k < \omega \,\} \cup S_k$ と置く．この時，$B_{e(m)} \cap \{\, p_n \mid n < \omega \,\} \subseteq \{\, p_n \mid n \leq m \,\} \in \mathrm{Fin}$ より $[B_{e(m)}] \wedge [\{\, p_n \mid n < \omega \,\}] = 0$ であるので，帰納法の仮定と合わせて

$$\begin{aligned} [S_{k+1}] \wedge [B_{e(m)}] &= ([\{\, p_k \mid k < \omega \,\}] \wedge [B_{e(m)}]) \vee ([S_k] \wedge [B_{e(m)}]) \\ &= 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

を得る．

最後に $\ell < \omega$ について $\{\, n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq \ell \,\}$ が有限であることを示す．まず，先程の議論より e は ω から I_k への順序同型なので $\{\, n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq \ell \,\} \approx \left\{\, n < \omega \;\middle|\; S_{k+1} \cap B_{e(n)} \subseteq \ell \,\right\}$ である．今，$S_{k+1} \cap B_{e(n)} = (\{\, p_k \mid k < \omega \,\} \cap B_{e(n)}) \cup (S_k \cap B_{e(n)})$ なので，これが $\subseteq \ell$ となるには，$\{\, p_k \mid k \leq n \,\} \subseteq \ell$ となる必要があり，特に $p_n < \ell$ でなくてはならないが，p_n の取り方より $n \leq p_n$ に取っているので，$n < \ell$ でなくてはならない．よって，$S_{k+1} \cap B_{e(n)} \subseteq \ell$ に含まれるような n の候補は高々 ℓ 個しかない．よって，$\{\, n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq \ell \,\}$ は有限である．

以上より，(2) を満たすように S_k $(k<\omega)$ を取ることが出来た．よって，補題 2 よりある $[A_\omega]$ が存在し，

$$[S_k] \leq [A_\omega], [A_\omega] \wedge [B_n] = 0 \ (n<\omega)$$

となる．特に，先程 S を取った時と同様な議論により $A_\omega \subseteq X$ としてよい．よって，特に $[A_\omega] \leq [X] < 1$ である．

そこで，$B_\omega = X \setminus A_\omega$ とおいて，これが条件 $(a) \sim (d)$ を満たすことを示す．

(a) $[A_\omega] \vee [B_\omega] = [X] < 1$ なので成立．

(b) $[A_\omega] \wedge [B_\omega] = [\emptyset] = 0$ より成立．

(c) $n < \omega$ とすれば，帰納法の仮定により $[A_n] < [A_{n+1}] \leq [S_0] \leq [A_\omega]$ より $[A_n] < [A_\omega]$．また，$B_n \setminus B_\omega = B_n \cap A_n \in \mathrm{Fin}$ なので $[B_n] \leq [B_\omega]$．よって，先程と同様の議論により $[B_n] < [B_{n+1}] \leq B_\omega$ となる．よって OK.

(d) 任意の $k < \omega$ に対し，$\{\, n<\omega \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k \,\}$ が有限であることを示す．もし $I_k = \{\, n<\omega \mid S \cap B_n \subseteq k \,\}$ が有限であれば，$[S] \leq [A_n]$ であることから補題 3 が適用出来，$\{\, n<\omega \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k \,\}$ も有限となる．

そこで，I_k が無限の場合を考える．この時，構成法から $\{\, n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq k \,\}$ は有限である．よって，構成時に使った e について，$\left\{\, n<\omega \;\middle|\; S_{k+1} \cap B_{e(n)} \subseteq k \,\right\}$ も有限．今，$[S_{k+1}] \leq [A_\omega]$ より，補題 3 から $\left\{\, n<\omega \;\middle|\; A_\omega \cap B_{e(n)} \subseteq k \,\right\}$ も有限となる．そこで，$n_0 = \sup^+ \left\{\, n<\omega \;\middle|\; A_\omega \cap B_{e(n)} \subseteq k \,\right\}$ とおけば $e(n_0) < \omega$ なので，$\{\, n<e(n_0) \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k \,\}$ は有限となる．n_0 の取り方と I_k の定義より，$\{\, n<\omega \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k \,\} = \{\, n<e(n_0) \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k \,\}$ となるので示された．

最後に $\beta > \omega$ の場合を考える．$\omega < \beta < \omega_1$ より，β は基数でないので特に特異順序数である．また，β は可算な極限順序数であるので，$\mathrm{cf}(\beta) = \omega$ となる．そこで，$f : \omega \to \beta$ を狭義単調増加な共終写像とする．この時，$A'_n = A_{f(n)}, B'_n = B_{f(n)}$ を考えると，A_α, B_α に関する帰納法の仮定から，上の議論を適用でき，A'_ω, B'_ω が取れる．そこで $A_\beta = A'_\omega, B_\beta = B'_\omega$ とおけば，これが題意を満たすものとなっていることがわかる：$(a), (b)$ が成り立つことは明らか．(c) については，$\alpha < \beta$ とすると，ω の β での共終性から $n < \omega$ で $\alpha \leq f(n)$ となるものが取れる．よって $[A_\alpha] \leq [A_{f(n)}] < [A_\beta]$ となる．$[B_\beta]$ についても同様である．(d) については，少し議論が必要である．まず，各 $k < \omega$ に対し $J_k = \left\{\, n<\omega \;\middle|\; A_\beta \cap B_{f(n)} \subseteq k \,\right\}$ は有限個である．そこで $n = \max J_k$ とおくと，f の共終性と B_n の単調性から $\{\, \alpha<\beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k \,\} = \{\, \alpha < f(n+1) \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k \,\}$ となる．今，帰納法の仮定より $\left\{\, \alpha < f(n+1) \;\middle|\; A_{f(n+1)} \cap B_\alpha \subseteq k \,\right\}$ は有限．$f(n+1) < \beta$ より $[A_{f(n+1)}] = [A'_{n+1}] \leq [A'_\omega] = [A_\beta]$ であるので，補題 3 から $\{\, \alpha < f(n+1) \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k \,\}$ も有限となる．以上より，任意の極限順序数 $\beta < \omega_1$ について必要な A_β, B_β が構成出来る．

以上より，$(a) \sim (d)$ を満たすような列 A_α, B_α $(\alpha < \omega_1)$ が取れた．そこで，$a_\alpha = [A_\alpha], b_\alpha = \neg[B_\alpha]$ とおけば，これが定理の主張する列となることを示す．

まず，$a_\alpha < a_\beta, b_\beta < b_\alpha$ $(\alpha < \beta)$ は条件 (c) から直ちに従う．また，条件 (b) より $a_\alpha \wedge \neg b_\alpha = [A_\alpha] \wedge [B_\alpha] = 0$ なので，ブール代数の一般論から $a_\alpha \leq b_\alpha$ となる．また，同様に条件 (a) から $a_\alpha \vee \neg b_\alpha = [A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$ なので $b_\alpha \not\leq a_\alpha$ である．よって $a_\alpha < b_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$ となる．以上より $a_\alpha < a_\beta < b_\beta < b_\alpha$ $(\alpha < \beta < \omega_1)$ は示された．

二つめの条件を示せば，証明が完了する．そこで，$a_\alpha \leq b \leq b_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$ となるような b が存在したとして，矛盾を導こう．まず $\{\, \alpha < \omega_1 \mid B \cap B_\alpha \subseteq k \,\}$ が有限であることを示す．証明には，次の二つの命題を

使う：

命題 1. κ : 正則基数, $X_\alpha \subseteq X_\beta$ $(\alpha < \beta < \kappa)$ とする．この時,
$\{\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}$ に包含関係に関する最大元が存在しない $\Rightarrow |\bigcup \{\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}| \geq \kappa$

Proof. $\delta_0 = 0, \delta_\beta = \min \left\{ \gamma < \kappa \;\middle|\; X_\gamma \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} X_{\delta_\alpha} \neq \emptyset \right\}$ $(\beta \neq 0)$ とおく．この時，任意の $\beta < \kappa$ に対し δ_β が定まる．もしある $\beta < \kappa$ に対し $\left\{ \gamma < \kappa \;\middle|\; X_\gamma \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} X_{\delta_\alpha} \neq \emptyset \right\} = \emptyset$ となったとすると,

$$\forall \gamma < \kappa, X_\gamma \subseteq \bigcup \{\, X_{\delta_a} \mid \alpha < \beta \,\}$$

が成立する．今，κ は正則なので，$\{\, \delta_\alpha \mid \alpha < \beta \,\}$ は κ で有界となる．よって，$\delta = \sup \{\, \delta_\alpha \mid \alpha < \beta \,\} < \kappa$ が定まり，条件から $X_{\delta_\alpha} < X_\delta$ となる．すると，上の議論から X_γ が $\{\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}$ の最大元となり矛盾．よって δ_β は well-defined である．そこで，$x_\beta \in X_{\delta_\beta} \setminus \bigcup \{\, X_{\delta_\alpha} \mid \alpha < \beta \,\}$ を取れば，各 x_β はそれぞれ異なるので，$|\{\, x_\beta \mid \beta < \kappa \,\}| = \kappa$ である．よって $\{\, x_\beta \mid \beta < \kappa \,\} \subseteq \bigcup \{\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}$ なので $|\bigcup \{\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}| \geq \kappa$ となる． □

更に，次の命題も成立する：

命題 2. κ : 基数, F_α : 有限集合, $(\alpha < \kappa)$, $F_\alpha \subseteq F_\beta$ $(\alpha < \beta < \kappa) \Longrightarrow |\bigcup \{\, F_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}| \leq \omega$

Proof. まず，包含関係に関して正則基数型を持つ $\{\, F_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}$ の共終部分集合を取る．共終性より，その共終部分集合の和集合は元の集合の和と一致するから，以後，κ は正則基数だと思えばよい．

そこで，命題 1 に倣って

$$\delta_0 = 0, \delta_\beta = \min \left\{ \gamma < \kappa \;\middle|\; X_\gamma \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} X_{\delta_\alpha} \neq \emptyset \right\} \ (\beta \neq 0)$$

□

とおき，x_β を命題 1 と同様に定義する．δ_β が定義されるような β の全体は明らかに順序数となるので，それを α と置く．この時, $\alpha \leq \omega$ である．もしこの $\alpha > \omega$ とすると, $\kappa > \omega$ であり，このとき $\{\, x_n \mid n < \omega \,\} \subseteq F_\omega$ となってしまい，F_i の有限性に反するからである．もし $\kappa \leq \omega$ ならば，可算集合の可算和は高々可算であることから主張は明らか．そこで，$\kappa > \omega$ とする．κ は正則としてよかったので，$\delta = \sup^+ \delta_\alpha < \kappa$ が取れ，上の議論から特に $\delta \leq \omega$ となる．もし，$\delta = \omega$ とすると，δ_n の取り方より $F_{\delta_n} \subsetneq F_{\delta_m}$ $(n < m)$ なので，F_ω が無限集合となり矛盾．よって，この場合は $\delta < \omega$ となるので，わかり易いように $N = \delta$ と書くことにする．このとき，$F_{\delta_n} \subsetneq F_\gamma$ $(n < N)$ となるような $\gamma < \kappa$ が存在すれば，$F_\gamma \setminus \bigcup \{\, F_{\delta_n} \mid n < N \,\} \neq \emptyset$ なので，$\gamma = \delta_N$ となり矛盾．よって，$\{\, F_{\delta_n} \mid n < N \,\}$ は非有界なので，その和は元の集合の和に一致し，特に有限集合の有限和となるので，全体として有限になる．以上より，命題は示された． □

以上の二つの命題を踏まえて，$J_k = \{\, \alpha < \omega_1 \mid B \cap B_\alpha \subseteq k \,\}$ の有限性を証明する．まず A_α, B_α の構成法

より，$\beta < \omega_1$ について，$\{ \alpha < \beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k \}$ は有限である．よって，補題 3 および仮定の $[A_\beta] \leq [B]$ より $\{ \alpha < \beta \mid B \cap B_\alpha \subseteq k \}$ も有限となる．

そこで，$F_\beta = \{ \alpha < \beta \mid B \cap B_\alpha \subseteq k \}$ $(\beta < \omega_1)$ とおけば，$\{ F_\beta \mid \beta < \kappa \}$ は有限集合族であり，明らかに $F_\alpha \subseteq F_\beta$ $(\alpha < \beta)$ となる．また，明らかに $J_k = \bigcup \{ F_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$ である．すると，命題 2 より $|\bigcup \{ F_\alpha \mid \alpha < \kappa \}| \leq \omega < \omega_1$ である．よって，ω_1 の正則性と命題 1 の対偶より，$\{ F_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$ は最大元 F_γ を持つ．よって，$F_\alpha \subseteq F_\gamma$ $(\alpha < \omega_1)$ より $J_k = \bigcup \{ F_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \} = F_\gamma$ となる．F_γ は有限だったから，各 J_k も有限となる．

すると，$\bigcup_{n<\omega} J_n$ は有限集合の可算和なので高々可算である．よって，$\alpha_0 \in \omega_1 \setminus \bigcup_{n<\omega} J_n$ が取れ，各 J_k の定義より $B \cap B_{\alpha_0}$ は無限集合となる．よって，$b \wedge \neg[b_{\alpha_0}] = [B] \wedge [B_{\alpha_0}] > 0$ となるので，ブール代数の一般論より $b \not\leq b_{\alpha_0}$ となる．これは $b \leq b_\alpha$ に反する．よって，このような b は存在しない．