

Hausdorff Gap の証明

石井大海

2018-03-05

定理 1 (Hausdorff). ブール代数 $\mathfrak{P}\omega/\text{Fin}$ について、次を満たす $\{a_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}, \{b_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ が存在する.

- (1) $a_\alpha < a_\beta < b_\beta < a_\alpha$ ($\alpha < \beta < \omega_1$)
- (2) $a_\alpha \leq b \leq b_\alpha$ ($\alpha < \omega_1$) を満たすような $b \in \mathfrak{P}\omega/\text{Fin}$ は存在しない.

以後, $[\]: \mathfrak{P}\omega \rightarrow \mathfrak{P}\omega/\text{Fin}$ を標準写像とする. この定理の証明の為に, 幾つかの命題を証明しておく. まず, 次の事は簡単に確認出来る:

- Fact 1.**
- (i) $[A] = 1 \Leftrightarrow A$ は補有限
 - (ii) $[A] \leq [B] \Leftrightarrow A \setminus B \in \text{Fin}$
 - (iii) $[A] \neq [B] \Leftrightarrow A \Delta B \notin \text{Fin}$

補題 1. $a_n \leq a_{n+1} < 1$ ($n < \omega$) ならば, $a_n \leq b < 1$ ($n < \omega$) となるような b が存在する.

Proof. $[A_n] = a_n$ となるような $A_n \subseteq \omega$ を取る. 次のようにして, $j_n < j_{n+1}$ を $A_i \cap [j_n, \omega) \subseteq A_n$ ($i < n$) を満たすように再帰的に定める.

まず, $j_0 = 0$ とする. そこで j_n まで $A_i \cap [j_n, \omega) \subseteq A_n$ ($i < n$) を満たすように取れているとして, j_{n+1} を作りたい. ここで,

$$j_{n+1} = \min \{ j_n < j < \omega \mid A_n \cap [j, \omega) \subseteq A_{n+1} \}$$

により j_{n+1} を定めよう. もし右辺の集合が空集合であれば, どんな $j > j_n$ に対しても $A_n \cap [j, \omega) \subseteq A_{n+1}$ となるので, $|A_n \setminus A_{n+1}| = \aleph_0$ となる. しかし, 仮定より $[A_n] \leq [A_{n+1}]$ であったので, $A_n \setminus A_{n+1} \in \text{Fin}$ でなくてはならず, 矛盾. よって $n < \omega$ に対し常に題意を満たす j_n が取れる.

次に, $j_n \leq k_n, k_n < k_{n+1}$ ($n < \omega$) を満たすように $k_n \notin A_n$ を構成したい. 今, 仮定より A_n は補有限ではないので, $\omega \setminus A_n$ は ω で非有界である. よって, このような k_n は常に取れる.

すると, $m > n$ なら $k_m \notin A_n$ が成立する. なぜなら, $m > n$ の時 $A_n \cap [j_m, \omega) \subseteq A_m$ であり, 今 $j_m \leq k_m$

であったので $A_n \cap [k_m, \omega) \subseteq A_m$ である. ここで $k_m \in A_n$ とすると, $k_m \in A_n \cap [k_m, \omega) \subseteq A_m$ となるが, $k_m \in \omega \setminus A_m$ なので矛盾.

そこで, $A = \omega \setminus \{k_n \mid n < \omega\}$ とおけば, $b = [A]$ が求めるものである. まず, 構成から A は補有限でないので, $b = [A] < 1$ である. また, $A'_n = A_n \cap [k_n, \omega)$ とおけば, $A_n \setminus A'_n \subseteq [0, k_n) \in \text{Fin}$ より $[A_n] \leq [A'_n]$. また $A'_n \subseteq A_n$ より $[A_n] \leq [A'_n]$. よって $[A_n] = [A'_n] = a_n$ である. $j \in A'_n$ とすると, $j > k_n$ かつ $j \neq k_m$ ($m > n$). よって, $A'_n \subseteq \omega \setminus \{k_n \mid n < \omega\}$ となるので, $a_n = [A_n] \leq [A] = b$ である. \square

補題 2. $a_n \leq a_{n+1}, b_n \leq b_{n+1}, a_n \wedge b_n = 0$ ($n < \omega$) ならば, $a_n \leq c$ かつ $b_n \wedge c = 0$ ($n < \omega$) となる c が存在する.

Proof. $a_n = [A_n], b_n = [B_n]$ とする. $a_n \wedge b_n = 0$ より $A_n \cap B_n \in \text{Fin}$ ($n < \omega$) である.

そこで,

$$\begin{aligned} A_i \cap [j_n, \omega) &\subseteq A_n \\ A_n \cap B_i &\subseteq [0, j_n) \end{aligned} \quad (i \leq n) \quad (*)$$

を満たすように $j_n < j_{n+1}$ を取りたい. まず, $A_n \cap B_n \in \text{Fin}$ より, $A_0 \cap B_0 \subseteq [0, j_0)$ となるような最小の j_0 が取れる. この時, $A_0 \cap [j_0, \omega) \subseteq A_0$ は自明に成立しているので, $n = 0$ の時は OK. そこで, (*) を満たす j_n が取れているとき, j_{n+1} を次のように定める:

$$j_{n+1} = \min \{ j_n < j < \omega \mid A_{n+1} \cap B_i \subseteq [0, j) \ (i < n+1), A_n \cap [j, \omega) \subseteq A_{n+1} \}$$

ここで, $A_{n+1} \cap B_i \subseteq [0, j)$ となるような j が取れることは補題 1 の証明で既に示した. また, $A_{n+1} \cap B_i \in \text{Fin}$ ($i \leq n+1$) だから, 各 i に対し $\subseteq [0, j)$ となるような j が取れる. 全順序性より二条件を満たすものは明らかに存在するので, j_{n+1} は well-defined である. 以上から, $j_n < j_{n+1}$ が取れる.

ここで $A'_n = A_n \cap [j_n, \omega)$ とおくと, 有限の差しかないので $[A'_n] = [A_n] = a_n$ である. そこで,

$$C = \bigcup \{ A'_n \mid n < \omega \} = \bigcup \{ A_n \cap [j_n, \omega) \mid n < \omega \}$$

として, $c = [C]$ とおけば, $a_n \leq c$ を満たす. また,

$$\begin{aligned} B_m \cap C &= \bigcup_{n < \omega} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \\ &= \bigcup_{n < m} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \cup \bigcup_{m \leq n < \omega} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \\ &\subseteq \bigcup_{n < m} (A_n \cap B_m \cap [j_n, \omega)) \cup \bigcup_{m \leq n < \omega} ([0, j_n) \cap [j_n, \omega)) \\ &\subseteq \bigcup_{n < m} (A_n \cap B_m) \in \text{Fin} \end{aligned}$$

よって, $b_m \wedge c = 0$ ($m < \omega$) も成立. \square

補題 3. λ を無限順序数とする. $X \subseteq \omega, X_\alpha \subseteq \omega$ ($\alpha < \lambda$), $[X] \leq [Y]$ とする. このとき, もし任意の $k < \omega$ について $\{\alpha < \lambda \mid X_\alpha \cap X \subseteq k\}$ が有限なら, Y も同様の性質を満たす.

Proof. 対偶を示す. つまり, $[X] \leq [Y]$ として, ある $k < \omega$ に対し, $Y \cap X_{\alpha_j} \subseteq k$ ($j < \omega$) を満たすような $\alpha_j < \omega$ が取れたとする. 今, $[X] \leq [Y]$ より $X \setminus Y \in \text{Fin}$. そこで, $\ell = \sup^+(X \setminus Y) < \omega$ と置く. この時,

$$\begin{aligned} X \cap X_{\alpha_j} &= ((X \cap Y) \cup (X \setminus Y)) \cap X_{\alpha_j} \\ &= (X \cap Y \cap X_{\alpha_j}) \cup (X \setminus Y) \cap X_{\alpha_j} \\ &\subseteq k \cup \ell = \max(k, \ell) \end{aligned}$$

よって $m = \max(k, \ell)$ とおけば $\{\alpha < \lambda \mid X \cap X_\alpha \subseteq m\} \notin \text{Fin}$ となる. よって示された. \square

以上, 三つの補題が, 以下の証明において本質的な役割を果たす.

定理の証明. 以下を満たすように A_α, B_α ($\alpha < \omega_1$) を帰納的に構成する:

- (a) $[A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$
- (b) $[A_\alpha] \wedge [B_\alpha] = 0$
- (c) $[A_\alpha] < [A_\beta], [B_\alpha] < [B_\beta]$ ($\alpha < \beta < \omega_1$)
- (d) 各 $k < \omega, \beta < \omega_1$ に対し, $\{\alpha < \beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k\}$ は有限

$\alpha = 0$ の時は, $A_0 = B_0 = \emptyset$ とおけばよい.

α が後続順序数の時. $A_{\alpha+1}, B_{\alpha+1}$ を作ることを考える. $\beta < \alpha$ とすると, 帰納法の仮定より $A_\alpha \cup B_\beta$ は補有限ではない. そこで, $\omega \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha) = \{n_k \mid k < \omega\}$ ($\ell < k \Rightarrow n_\ell < n_k$) として,

$$\begin{aligned} P &= \{n_k \mid k \equiv 0 \pmod{3}\} & Q &= \{n_k \mid k \equiv 1 \pmod{3}\} \\ A_{\alpha+1} &= A_\alpha \cup P & B_{\alpha+1} &= B_\alpha \cup Q \end{aligned}$$

とおく. このとき, $\omega \setminus (A_{\alpha+1} \cup B_{\alpha+1}) = \{n_k \mid k \equiv 2 \pmod{3}\}$ となるので, $[A_{\alpha+1}] \vee [B_{\alpha+1}] < 1$ である. よって条件 (a) は成立. また, 条件 (b) についても,

$$\begin{aligned} A_{\alpha+1} \cap B_{\alpha+1} &= (A_\alpha \cup P) \cap (B_\alpha \cup Q) \\ &= (A_\alpha \cap B_\alpha) \cup \underbrace{(A_\alpha \cap Q)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(B_\alpha \cap P)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(P \cap Q)}_{=\emptyset} \\ &= A_\alpha \cap B_\alpha \in \text{Fin} \end{aligned}$$

より $[A_{\alpha+1}] \wedge [B_{\alpha+1}] = 0$ となるので OK.

構成法より $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha = P, B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha = Q$ はいずれも無限集合なので, $[A_\alpha] < [A_{\alpha+1}], [B_\alpha] < [B_{\alpha+1}]$ である. 帰納法の仮定より $[A_\beta] < [A_\alpha], [B_\beta] < [B_\alpha]$ ($\beta < \alpha$) が成立するので, これらを組み合わせれば $[A_\beta] < [A_{\alpha+1}], [B_\beta] < [B_{\alpha+1}]$ ($\beta < \alpha + 1$) となり, 条件 (c) も成立.

最後に (d) が成立することを背理法により示そう. そこで, $\{\beta < \alpha + 1 \mid A_{\alpha+1} \cap B_\beta \subseteq k\}$ が無限となるような $k < \omega$ が存在したとする. この時, 増大列 $\beta_n < \beta_{n+1}$ ($n < \omega$) であって $A_{\alpha+1} \cap B_{\beta_n} \subseteq k$ となるものが取れる. 構成から $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1}$ であるので, $A_\alpha \cap B_{\beta_n} \subseteq k$ ($n < \omega$) となる. これは帰納法の仮定に反する.

よって (d) も成立. 以上より, α が後続順序数の時, 条件 (a) ~ (d) を満たすように A_α, B_α を作る事が出来る.

$\alpha = \beta$ が極限順序数の時, $\gamma < \beta$ のとき, 帰納法の仮定の (a) および (c) と補題 1 から $[A_\gamma] \vee [B_\gamma] \leq [X] < 1$ ($\gamma < \beta$) を満たす $X \subseteq \omega$ が取れる. 同様に補題より

$$[A_\gamma] \leq [S], \quad [B_\gamma] \wedge [S] = 0 \quad (\gamma < \beta) \quad (1)$$

を満たす S が取れ, 特に $S \subseteq X$ としてよい (特に $[X] \wedge [S]$ を考えれば, $[X] \wedge [S] \geq ([A_\gamma] \vee [B_\gamma]) \wedge [S] = [A_\gamma]$ であり, $[X] \wedge [S] \wedge [B_\gamma] = 0$ なので条件を満たす. また, $[X] \wedge [S] \subseteq [X]$ より $[S'] = [X] \wedge [S]$ で $S' \subseteq X$ を満たすような S' が取れる).

補題 2 を使って A_β を定めたい. そこで, まずは $\beta = \omega$ の場合について, $[B_\gamma]$ について補題 2 の前提を満たす列 $S \subseteq [S_k]$ を作りたい:

$$\begin{cases} [S_k] \leq [S_{k+1}] & (k < \omega) \\ [B_n] \leq [B_{n+1}] & (n < \omega) \\ [S_n] \wedge [B_n] = 0 & (n < \omega) \end{cases} \quad (2)$$

今, $I_k = \{n < \omega \mid S \cap B_n \subseteq k\}$ ($k < \omega$) とおき, これを用いて S を膨らませた列を作ることを考える. 上の条件を満たす $[S_k]$ を得るため, $[S_k] \wedge [B_n] = 0$ かつ $\{n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq k\}$ が有限となるように $[S_k]$ を帰納的に定める. $k = 0$ の時は, $S_0 = S$ とすれば良い. そこで, S_k まで条件を満たすように構成出来たとして, S_{k+1} を作ろう.

I_k が有限集合の時は, $S_{k+1} = S_k$ とおく. I_k が無限集合の時を考える. $\{n < m \mid S \cap B_n \subseteq k\}$ は有限集合であるので, $\langle I_k, < \rangle$ は各始切片が有限集合であるような無限整列集合である. このような性質を持つ順序数は ω のみであるので, 同型 $e: \omega \rightarrow I_k$ が取れ, 特に e は狭義単調増加な全射である. 更に, このとき $\sup \{e(n) \mid n < \omega\} = \omega$ である. これを示すには, e が全射であることから $\sup \{e(n) \mid n < \omega\} = \sup I_k$ となるので, $\sup I_k = \omega$ を示せばよい. もし $\sup I_k = m < \omega$ とすれば, 特に $I_k = \{n < m+1 \mid S \cap B_n \subseteq k\}$ と書けることになる. 今, $m+1 < \omega$ であり, (*) より I_k は有限集合となり, 仮定に反する. よって $\sup I_k = \omega$ となる.

さて, $[B_\alpha]$ に関する帰納法の仮定 (c) より $[B_n] < [B_{n+1}]$ ($n < \omega$) である. よって, 数学的帰納法により $0 < [B_{e(n)} \setminus \bigcup_{i < n} B_{e(i)}] \leq [X]$ となる事がわかる. 従って $B_{e(n)} \setminus \bigcup_{i < n} B_{e(i)}$ が無限なので, $p_n \in (B_{e(n)} \setminus \bigcup_{i < n} B_{e(i)}) \cap X$ を満たすような $n \leq p_n$ が取れ, 特に $p_n < p_{n+1}$ とできる. そこで, $S_{k+1} = \{p_k \mid k < \omega\} \cup S_k$ と置く. この時, $B_{e(m)} \cap \{p_n \mid n < \omega\} \subseteq \{p_n \mid n \leq m\} \in \text{Fin}$ より $[B_{e(m)}] \wedge [\{p_n \mid n < \omega\}] = 0$ であるので, 帰納法の仮定と合わせて

$$\begin{aligned} [S_{k+1}] \wedge [B_{e(m)}] &= ([\{p_k \mid k < \omega\}] \wedge [B_{e(m)}]) \vee ([S_k] \wedge [B_{e(m)}]) \\ &= 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

を得る.

最後に $l < \omega$ について $\{n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq l\}$ が有限であることを示す. まず, 先程の議論より e は ω から I_k への順序同型なので $\{n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq l\} \approx \{n < \omega \mid S_{k+1} \cap B_{e(n)} \subseteq l\}$ である. 今, $S_{k+1} \cap B_{e(n)} = (\{p_k \mid k < \omega\} \cap B_{e(n)}) \cup (S_k \cap B_{e(n)})$ なので, これが $\subseteq l$ となるには, $\{p_k \mid k \leq n\} \subseteq l$ となる必要があり, 特に $p_n < l$ でなくてはならないが, p_n の取り方より $n \leq p_n$ に取っているのだから, $n < l$ でなくてはならない. よって, $S_{k+1} \cap B_{e(n)} \subseteq l$ に含まれるような n の候補は高々 l 個しかない. よって, $\{n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq l\}$ は有限である.

以上より、(2) を満たすように S_k ($k < \omega$) を取ることが出来た。よって、補題 2 よりある $[A_\omega]$ が存在し、

$$[S_k] \leq [A_\omega], [A_\omega] \wedge [B_n] = 0 \quad (n < \omega)$$

となる。特に、先程 S を取った時と同様な議論により $A_\omega \subseteq X$ としてよい。よって、特に $[A_\omega] \leq [X] < 1$ である。

そこで、 $B_\omega = X \setminus A_\omega$ とおいて、これが条件 (a) ~ (d) を満たすことを示す。

- (a) $[A_\omega] \vee [B_\omega] = [X] < 1$ なので成立。
- (b) $[A_\omega] \wedge [B_\omega] = [\emptyset] = 0$ より成立。
- (c) $n < \omega$ とすれば、帰納法の仮定により $[A_n] < [A_{n+1}] \leq [S_0] \leq [A_\omega]$ より $[A_n] < [A_\omega]$ 。また、 $B_n \setminus B_\omega = B_n \cap A_n \in \text{Fin}$ なので $[B_n] \leq [B_\omega]$ 。よって、先程と同様の議論により $[B_n] < [B_{n+1}] \leq B_\omega$ となる。よって OK。
- (d) 任意の $k < \omega$ に対し、 $\{n < \omega \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k\}$ が有限であることを示す。もし $I_k = \{n < \omega \mid S \cap B_n \subseteq k\}$ が有限であれば、 $[S] \leq [A_n]$ であることから補題 3 が適用出来、 $\{n < \omega \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k\}$ も有限となる。

そこで、 I_k が無限の場合を考える。この時、構成法から $\{n \in I_k \mid S_{k+1} \cap B_n \subseteq k\}$ は有限である。よって、構成時に使った e について、 $\{n < \omega \mid S_{k+1} \cap B_{e(n)} \subseteq k\}$ も有限。今、 $[S_{k+1}] \leq [A_\omega]$ より、補題 3 から $\{n < \omega \mid A_\omega \cap B_{e(n)} \subseteq k\}$ も有限となる。そこで、 $n_0 = \sup^+ \{n < \omega \mid A_\omega \cap B_{e(n)} \subseteq k\}$ とおけば $e(n_0) < \omega$ なので、 $\{n < e(n_0) \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k\}$ は有限となる。 n_0 の取り方と I_k の定義より、 $\{n < \omega \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k\} = \{n < e(n_0) \mid A_\omega \cap B_n \subseteq k\}$ となるので示された。

最後に $\beta > \omega$ の場合を考える。 $\omega < \beta < \omega_1$ より、 β は基数でないので特に特異順序数である。また、 β は可算な極限順序数であるので、 $\text{cf}(\beta) = \omega$ となる。そこで、 $f: \omega \rightarrow \beta$ を狭義単調増加な共終写像とする。この時、 $A'_n = A_{f(n)}, B'_n = B_{f(n)}$ を考えると、 A_α, B_α に関する帰納法の仮定から、上の議論を適用でき、 A'_ω, B'_ω が取れる。そこで $A_\beta = A'_\omega, B_\beta = B'_\omega$ とおけば、これが題意を満たすものとなっていることがわかる：(a), (b) が成り立つことは明らか。(c) については、 $\alpha < \beta$ とすると、 ω の β での共終性から $n < \omega$ で $\alpha \leq f(n)$ となるものが取れる。よって $[A_\alpha] \leq [A_{f(n)}] < [A_\beta]$ となる。 $[B_\beta]$ についても同様である。(d) については、少し議論が必要である。まず、各 $k < \omega$ に対し $J_k = \{n < \omega \mid A_\beta \cap B_{f(n)} \subseteq k\}$ は有限個である。そこで $n = \max J_k$ とおくと、 f の共終性と B_n の単調性から $\{\alpha < \beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k\} = \{\alpha < f(n+1) \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k\}$ となる。今、帰納法の仮定より $\{\alpha < f(n+1) \mid A_{f(n+1)} \cap B_\alpha \subseteq k\}$ は有限。 $f(n+1) < \beta$ より $[A_{f(n+1)}] = [A'_{n+1}] \leq [A'_\omega] = [A_\beta]$ であるので、補題 3 から $\{\alpha < f(n+1) \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k\}$ も有限となる。以上より、任意の極限順序数 $\beta < \omega_1$ について必要な A_β, B_β が構成出来る。

以上より、(a) ~ (d) を満たすような列 A_α, B_α ($\alpha < \omega_1$) が取れた。そこで、 $a_\alpha = [A_\alpha], b_\alpha = \neg[B_\alpha]$ とおけば、これが定理の主張する列となることを示す。

まず、 $a_\alpha < a_\beta, b_\beta < b_\alpha$ ($\alpha < \beta$) は条件 (c) から直ちに従う。また、条件 (b) より $a_\alpha \wedge \neg b_\alpha = [A_\alpha] \wedge [B_\alpha] = 0$ なので、ブール代数の一般論から $a_\alpha \leq b_\alpha$ となる。また、同様に条件 (a) から $a_\alpha \vee \neg b_\alpha = [A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$ なので $b_\alpha \not\leq a_\alpha$ である。よって $a_\alpha < b_\alpha$ ($\alpha < \omega_1$) となる。以上より $a_\alpha < a_\beta < b_\beta < b_\alpha$ ($\alpha < \beta < \omega_1$) は示された。

二つめの条件を示せば、証明が完了する。そこで、 $a_\alpha \leq b \leq b_\alpha$ ($\alpha < \omega_1$) となるような b が存在したとして、矛盾を導こう。まず $\{\alpha < \omega_1 \mid B \cap B_\alpha \subseteq k\}$ が有限であることを示す。証明には、次の二つの命題を使う：

命題 1. κ : 正則基数, $X_\alpha \subseteq X_\beta$ ($\alpha < \beta < \kappa$) とする. この時,
 $\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ に包含関係に関する最大元が存在しない $\Rightarrow |\bigcup\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}| \geq \kappa$

Proof. $\delta_0 = 0, \delta_\beta = \min\left\{\gamma < \kappa \mid X_\gamma \setminus \bigcup_{\alpha < \beta} X_{\delta_\alpha} \neq \emptyset\right\}$ ($\beta \neq 0$) とおく. この時, 任意の $\beta < \kappa$ に対し δ_β が定まる. もしある $\beta < \kappa$ に対し $\left\{\gamma < \kappa \mid X_\gamma \setminus \bigcup_{\alpha < \beta} X_{\delta_\alpha} \neq \emptyset\right\} = \emptyset$ となったとすると,

$$\forall \gamma < \kappa, X_\gamma \subseteq \bigcup\{X_{\delta_\alpha} \mid \alpha < \beta\}$$

が成立する. 今, κ は正則なので, $\{\delta_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ は κ で有界となる. よって, $\delta = \sup\{\delta_\alpha \mid \alpha < \beta\} < \kappa$ が定まり, 条件から $X_{\delta_\alpha} < X_\delta$ となる. すると, 上の議論から X_γ が $\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ の最大元となり矛盾. よって δ_β は well-defined である. そこで, $x_\beta \in X_{\delta_\beta} \setminus \bigcup\{X_{\delta_\alpha} \mid \alpha < \beta\}$ を取れば, 各 x_β はそれぞれ異なるので, $|\{x_\beta \mid \beta < \kappa\}| = \kappa$ である. よって $\{x_\beta \mid \beta < \kappa\} \subseteq \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ なので $|\bigcup\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}| \geq \kappa$ となる. \square

更に, 次の命題も成立する:

命題 2. κ : 基数, F_α : 有限集合, ($\alpha < \kappa$), $F_\alpha \subseteq F_\beta$ ($\alpha < \beta < \kappa$) $\implies |\bigcup\{F_\alpha \mid \alpha < \kappa\}| \leq \omega$

Proof. まず, 包含関係に関して正則基数型を持つ $\{F_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ の共終部分集合を取る. 共終性より, その共終部分集合の和集合は元の集合の和と一致するから, 以後, κ は正則基数だと思えばよい.

そこで, 命題 1 に倣って

$$\delta_0 = 0, \delta_\beta = \min\left\{\gamma < \kappa \mid F_\gamma \setminus \bigcup_{\alpha < \beta} F_{\delta_\alpha} \neq \emptyset\right\} \quad (\beta \neq 0)$$

とおき, x_β を命題 1 と同様に定義する. δ_β が定義されるような β の全体は明らかに順序数となるので, それを α と置く. この時, $\alpha \leq \omega$ である. もしこの $\alpha > \omega$ とすると, $\kappa > \omega$ であり, このとき $\{x_n \mid n < \omega\} \subseteq F_\omega$ となってしまう, F_i の有限性に反するからである. もし $\kappa \leq \omega$ ならば, 可算集合の可算和は高々可算であることから主張は明らか. そこで, $\kappa > \omega$ とする. κ は正則としてよかったので, $\delta = \sup^+ \delta_\alpha < \kappa$ が取れ, 上の議論から特に $\delta \leq \omega$ となる. もし, $\delta = \omega$ とすると, δ_n の取り方より $F_{\delta_n} \subsetneq F_{\delta_m}$ ($n < m$) なので, F_ω が無限集合となり矛盾. よって, この場合は $\delta < \omega$ となるので, わかり易いように $N = \delta$ と書くことにする. このとき, $F_{\delta_n} \subsetneq F_\gamma$ ($n < N$) となるような $\gamma < \kappa$ が存在すれば, $F_\gamma \setminus \bigcup\{F_{\delta_n} \mid n < N\} \neq \emptyset$ なので, $\gamma = \delta_N$ となり矛盾. よって, $\{F_{\delta_n} \mid n < N\}$ は非有界なので, その和は元の集合の和に一致し, 特に有限集合の有限和となるので, 全体として有限になる. 以上より, 命題は示された. \square

以上の二つの命題を踏まえて, $J_k = \{\alpha < \omega_1 \mid B \cap B_\alpha \subseteq k\}$ の有限性を証明する. まず A_α, B_α の構成法より, $\beta < \omega_1$ について, $\{\alpha < \beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k\}$ は有限である. よって, 補題 3 および仮定の $[A_\beta] \leq [B]$ より $\{\alpha < \beta \mid B \cap B_\alpha \subseteq k\}$ も有限となる.

そこで, $F_\beta = \{\alpha < \beta \mid B \cap B_\alpha \subseteq k\}$ ($\beta < \omega_1$) とおけば, $\{F_\beta \mid \beta < \kappa\}$ は有限集合族であり, 明らかに $F_\alpha \subseteq F_\beta$ ($\alpha < \beta$) となる. また, 明らかに $J_k = \bigcup \{F_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ である. すると, 命題 2 より $|\bigcup \{F_\alpha \mid \alpha < \kappa\}| \leq \omega < \omega_1$ である. よって, ω_1 の正則性と命題 1 の対偶より, $\{F_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ は最大元 F_γ を持つ. よって, $F_\alpha \subseteq F_\gamma$ ($\alpha < \omega_1$) より $J_k = \bigcup \{F_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} = F_\gamma$ となる. F_γ は有限だったから, 各 J_k も有限となる.

すると, $\bigcup_{n < \omega} J_n$ は有限集合の可算和なので高々可算である. よって, $\alpha_0 \in \omega_1 \setminus \bigcup_{n < \omega} J_n$ が取れ, 各 J_k の定義より $B \cap B_{\alpha_0}$ は無限集合となる. よって, $b \wedge \neg[b_{\alpha_0}] = [B] \wedge [B_{\alpha_0}] > 0$ となるので, ブール代数の一般論より $b \not\leq b_{\alpha_0}$ となる. これは $b \leq b_\alpha$ に反する. よって, このような b は存在しない. \square