集合論ゼミ 2012 年 10 月 16 日

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科三年

2012 年 10 月 16 日

前回の復習

- ~~素朴~~Frege の初期公理的集合論[1] ……外延性公理と内包公理から成る
  - 内包公理は矛盾する！
  - Russel のパラドックス：$\neg\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$
- 公理的集合論……内包公理の代わりに適当なインスタンスを仮定

  $\Rightarrow$ 集合の集まりが集合とは限らない
    - それでも $\mathbb{R}$ や可算順序数全体，ある集合上の測度, etc... は集合を成す.
  - 集合とは限らない集まりについても言及出来た方が便利

[1] 素朴集合論にはそもそも公理など存在しないので，矛盾のしようがない.

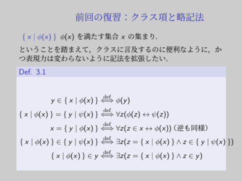
前回の復習：クラス項と略記法

$\{ x \mid \phi(x) \}$ $\phi(x)$ を満たす集合 x の集まり．

ということを踏まえて，クラスに言及するのに便利なように，かつ表現力は変わらないように記法を拡張したい．

Def. 3.1

$$
\begin{aligned}
y \in \{ x \mid \phi(x) \} &\overset{\text{def}}{\iff} \phi(y) \\
\{ x \mid \phi(x) \} = \{ y \mid \psi(x) \} &\overset{\text{def}}{\iff} \forall z(\phi(z) \leftrightarrow \psi(z)) \\
x = \{ y \mid \phi(x) \} &\overset{\text{def}}{\iff} \forall z(z \in x \leftrightarrow \phi(x)) \text{（逆も同様）} \\
\{ x \mid \phi(x) \} \in \{ y \mid \psi(x) \} &\overset{\text{def}}{\iff} \exists z(z = \{ x \mid \phi(x) \} \land z \in \{ y \mid \psi(x) \}) \\
\{ x \mid \phi(x) \} \in y &\overset{\text{def}}{\iff} \exists z(z = \{ x \mid \phi(x) \} \land z \in y)
\end{aligned}
$$



あとで使うので，この定義一覧は残しておく．

1. $\phi(x)$ を満たす x の集まりより明らか．
2. クラスが等しい $\Leftrightarrow$ 中身の述語が同値
3. x に属すことと，クラスの述語を満たすことが同値
4. 元は集合に限りたい！
   - 補足：Gödel の赤本では「クラス変数は $\in$ の左にこない」という記述があったらしい．

拡張言語

- クラスの概念を追加して言語を拡張
  - 普通の数学でやるのとはちょっと違うやり方

  $\leftrightarrow$ 普通は便利の為に定義を足していく拡張方法（こっちもやる）
- 書き易さが改善されるだけで，絶対的な表現力は増えない．

約束

拡張言語 その時点までの種々の約束と定義を積み重ねて得られる言語．

基本言語 第一節で示した言語だけを指す．

$\Rightarrow$ 「基本言語」の意味は一意．「拡張言語」は新たな定義を追加していってどんどん発展していくので一意ではない．

記法の約束

約束

特に断りのない限り,
小文字ギリシャ文字 は基本言語の論理式（$\phi, \psi, \ldots$）を,
大文字ギリシャ文字 は拡張言語の論理式（$\Phi, \Psi, \ldots$）を
それぞれ表すものとする.

クラスを足して言語を拡張した．ここから更に二段階の拡張.

1. 拡張言語の論理式によるクラス項の導入
2. クラス変数の追加

拡張言語の論理式によるクラス項

1. $\{\, x \mid \phi(x) \,\}$ の $\phi(x)$ に拡張言語の論理式を許す

$=$ クラス項のネストを許可する.

2. 問題：$\{\, x \mid \Phi(x) \,\}$ がちゃんと意味を持つか？

$\Rightarrow$ 一段階以上の展開が要るだけで，特に難しくはない.

Example 3.2

$$z = \{\, x \mid x \in \{\, y \mid \phi(x) \,\} \vee x \in \{\, y \mid \psi(x) \,\} \,\} \tag{1}$$

$$\overset{z=\{\,\dots\}}{\rightsquigarrow} \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in \{\, x \mid x \in \{\, y \mid \phi(x) \,\} \vee x \in \{\, y \mid \psi(x) \,\} \,\}) \tag{2}$$

$$\overset{u\in\{\,\dots\}}{\rightsquigarrow} \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in \{\, y \mid \phi(x) \,\} \vee u \in \{\, y \mid \psi(x) \,\}) \tag{3}$$

$$\overset{u\in\{\,\dots\}}{\rightsquigarrow} \forall u(u \in z \leftrightarrow \phi(u) \vee \psi(u)) \tag{4}$$

- こんな感じで取り除ける（いつも上手くいくことは後程）.
- (1) 以上に複雑な論理式はまず出て来ない.

⋆ 拡張言語の Ψ は必ず同値な基本の論理式 ψ を持つので,
$\{\, x \mid \Psi(x) \,\} = \{\, x \mid \psi(x) \,\}$ と出来る.

$\rightarrow$ 同じクラスを指すクラス項が増えただけ！

クラス**変数**の追加

Def. 3.3 (クラス変数)

任意のクラス項を表わす変数を導入し，大文字アルファベット（$A, B, C, \ldots$）によって表す.

Example 3.4

$A = B \to B = A$ と云う命題は，任意の論理式 $\Psi(x), \Phi(x)$ に対し

$$\{\, x \mid \Phi(x) \,\} = \{\, y \mid \Psi(x) \,\} \to \{\, y \mid \Psi(x) \,\} = \{\, x \mid \Phi(x) \,\}$$

が成立する，の意．これは定義に戻れば結局

$$\forall z(\Phi(z) \leftrightarrow \Psi(z)) \to \forall z(\Psi(z) \leftrightarrow \Phi(z))$$

となる．更にこれは基本言語の論理式スキーマ

$$\forall z(\phi(z) \leftrightarrow \psi(z)) \to \forall z(\psi(z) \leftrightarrow \phi(z))$$

を表している．
$\to$ つまり，$A = B \to B = A$ は単一の基本言語の論理式ではなく，この形の論理式のスキーマを表している！

クラス変数とクラス項について

$\{\, y \mid \Phi(x) \,\}$ の Φ にはクラス変数が含まれてもよい．こうしたクラス変数は，パラメータとしての集合変数と同じ役割をする．

Rem.

1. クラス変数は自由変数としてしか登場しない！

$\Rightarrow$ $\forall, \exists$ による量化は受け付けない．

- これを許すと基本言語で表わせない論理式が書ける．

約束

自由クラス変数 A を含む論理式は，一般の（=任意の）A についての言明と見做す（universal closure）．

$A = B \to B = A$ は「任意のクラス A, B に対し，$A = B$ ならば $B = A$」という言明だと解釈する．

クラス変数とクラス項について

$\{ y \mid \Phi(x) \}$ の Φ にはクラス変数が含まれてもよい．こうしたクラス変数は，パラメータとしての集合変数と同じ役割をする．

Rem.

1. クラス変数は自由変数としてしか登場しない！

$\Rightarrow$ $\forall, \exists$ による量化は受け付けない．

- これを許すと基本言語で表わせない論理式が書ける．

約束

自由クラス変数 A を含む論理式は，一般の（=任意の）A についての言明と見做す（universal closure）．
$A = B \to B = A$ は「任意のクラス A, B に対し，$A = B$ ならば $B = A$」という言明だと解釈する．

1. 例えば,「集合論の公理を満たすようなクラスが存在する」とか.
2. 全称量化されていると解釈することで，無限個からなる命題スキーマを一つの命題で表現出来るようになる（それがクラス導入の目的のひとつ）.

クラスの歴史

Cantor 1899 逆理の後，クラスの非形式的なアイデアが見られる.

Fraenkel 1922 クラスの代わりに函数を用いた公理系の先駆け.

von Neumann 1925 函数概念を用いた定式化の成熟版.

Bernays 1937 集合論のクラスを用いた公理系の最初の例.

Quine 1963 この本でのクラスの用法が初めて陽に述べられた. 方法自体は Bernays の原稿で既に知られてはいた.

- von Neumann など，元にならない以外はクラスも「実際の」対象であるとして扱う数学者も多い.
- どの立場にせよ，数学的には本質の違いは殆んどない.

$\rightarrow$ ZF の公理を受け容れれば，基となる集合論は一つだけ！

4. クラスの形式的な導入

- 前節：基本言語の略記法としてクラス項・クラス変数を導入.
  - 基本的にはこの立場を維持

$\leftrightarrow$ ここでは，Bernays 1958 に倣って，略記法ではなくホンモノの式となるような形式系を構築

$\longleftarrow$ 実際上で基本言語ではなく拡張言語を使うのなら，実際にはどんな形式系を使っているのかを明らかにしておかないと得るところがない.

- 「クラス = 略記法」とする立場とは矛盾しない

  $\rightarrow$ 拡張言語を基本言語で解釈する為のルールによって正当化.

形式系の定義

二種ソート等号付き一命題論理によって定式化.

大文字　クラス変数

小文字　集合変数

Rem.

クラス変数はあくまで形式的な変数であって，前節のようなクラス項を指す数学記号ではない.

以下，ドイツ文字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ はクラス項，クラス変数または集合変数を表すメタ記号とする．

原子式 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$ または $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の形．

論理式 原子式から論理結合子 $\neg, \to, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ と集合変数のみに関する量化によって得られるもの．

クラス項 任意の論理式 Φ に対し $\{\, x \mid \Phi(x) \,\}$ の形．

論理体系
- 集合変数に関する等号つき一階述語論理
- クラス変数に関する等号つき自由変数命題論理

の公理・推論規則と，次の置換規則．

Rules 4.1

クラス置き換え規則 $\dfrac{\Phi(A)}{\Phi(x)}$

本質的には「全ての集合はクラスである」ということ．

以下，ドイツ文字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ はクラス項，クラス変数または集合変数を表すメタ記号とする．

原子式 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$ または $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の形．

論理式 原子式から論理結合子 $\neg, \to, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ と集合変数のみに関する量化によって得られるもの．

クラス項 任意の論理式 Φ に対し $\{ x \mid \Phi(x) \}$ の形．

論理体系
- 集合変数に関する等号つき一階述語論理
- クラス変数に関する等号つき自由変数命題論理

の公理・推論規則と，次の置換規則．

Rules 4.1

クラス置き換え規則 $\dfrac{\Phi(A)}{\Phi(x)}$

本質的には「全ての集合はクラスである」ということ．

相互再帰的定義になっていることに注意（クラス項と原子式）

覚えておくべきこと

- 論理体系の公理や，推論規則を一々覚えなくてもよい．

$\rightarrow$ 集合はクラス！を念頭において，あとは普通の数学と同じように考えればよい．

Axiom 4.2 (拡張理論の基本的公理)

外延性公理を含めて以下の三つ.

1. $y \in \{ x \mid \Phi(x) \} \leftrightarrow \Phi(y)$
2. $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
3. $A \in B \leftrightarrow \exists x(x = A \land x \in B)$

以下の略記則や集合論の外延性公理

$$A = y \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in y)$$
$$y = z \leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z)$$
$$A \in y \leftrightarrow \exists x(x = A \land x \in y)$$

は，上の公理と置換規則 (4.1) から従う.

Axiom 4.2 (拡張理論の基本的公理)

外延性公理を含めて以下の三つ.

1. $y \in \{ x \mid \Phi(x) \} \leftrightarrow \Phi(y)$
2. $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
3. $A \in B \leftrightarrow \exists x(x = A \wedge x \in B)$

以下の略記則や集合論の外延性公理

$$A = y \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in y)$$
$$y = z \leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z)$$
$$A \in y \leftrightarrow \exists x(x = A \wedge x \in y)$$

は，上の公理と置換規則 (4.1) から従う.

実際に導出すること.

(1) と (3) は集合に関する情報を持たないので，集合論の真の公理ではない．

対して (2) は外延性の公理を含むので，部分的に集合論の公理になっている．

Def. 4.3 (用語)

A は集合	$\exists x(x = A)$ の略記
A は真のクラス	「A は集合」でない.
	e.g. $\neg\exists x(x = A)$
$\{\, x \in A \mid \Phi(x) \,\}$	$\{\, x \mid x \in A \wedge \Phi(x) \,\}$ の略記
P	外延性公理のみを含む，基本言語の理論.
P^*	(4.2) を含む，拡張言語の理論.

前節では，P で出来る以上のことは P^* で出来ないことを非形式的に云った．
「出来る」には二つの意味：

1. 表現力
2. 証明力

これから，それぞれをきちんと定式化して証明する．

前節では，P で出来る以上のことは P^* で出来ないことを非形式的に云った.
「出来る」には二つの意味：

1. 表現力
2. 証明力

これから，それぞれをきちんと定式化して証明する.

無限個の論理式を一つにまとめるのは別.

Th. 4.4 (除去定理（**表現力**の比較）)

$\Phi(A_1, \ldots, A_n)$ $A_1, \ldots, A_n$ 以外にクラス変数を含まない拡張言語の論理式.

$\{ x_1 \mid \Psi_1(x) \}, \ldots, \{ x_n \mid \Psi_n(x) \}$ クラス変数を含まないクラス項.

とすると， $\exists\phi$: 基本言語の論理式 が存在して,

$$P^* \vdash \Phi(\{ x_1 \mid \Psi_1(x) \}, \ldots, \{ x_n \mid \Psi_n(x) \}) \leftrightarrow \phi$$

となる． この時，ϕ は $\Phi(A_1, \ldots, A_n)$ のクラス項 $\{ x_i \mid \Psi_i(x) \}$ に対応する基本インスタンスと云う.

Th. 4.4 (除去定理（表現力の比較）)

$\Phi(A_1, \dots, A_n)$ $A_1, \dots, A_n$ 以外にクラス変数を含まない拡張言語の論理式.

$\{ x_1 \mid \Psi_1(x) \}, \dots, \{ x_n \mid \Psi_n(x) \}$ クラス変数を含まないクラス項.

とすると， $\exists \phi$: 基本言語の論理式 が存在して，

$$P^* \vdash \Phi(\{ x_1 \mid \Psi_1(x) \}, \dots, \{ x_n \mid \Psi_n(x) \}) \leftrightarrow \phi$$

となる．この時，ϕ は $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ のクラス項 $\{ x_i \mid \Psi_i(x) \}$ に対応する基本インスタンスと云う.

$\Phi(\{ x_1 \mid \Psi_1(x) \}, \dots, \{ x_n \mid \Psi_n(x) \})$ がクラス変数を他に含むと，それに応じて ϕ が一つに決まらなくなってしまうので，各クラス項はクラス変数を含んでいてはいけない.

定理の証明 I

深追いせずに概略のみ紹介する（Appendix 参照）．
Λ : クラス変数を含まない拡張言語論理式 とする．このとき，Λ の重みを $\langle b(\Lambda), \ell(\Lambda) \rangle$ で定める．ここで，

$\ell(\Lambda)$ Λ に含まれる記号の数（=長さ）

$b(\Lambda)$ クラス項の「出現回数」

とする．ただし，$\{ x \mid \Phi(x) \}$ の「出現回数」は，$\Phi(x)$ の形に応じて次のように定める．τ : を任意の項とする．

- $\tau = \{ y \mid \Psi(x) \}$ または $\{ y \mid \Psi(x) \} = \tau$ の形の時 2 回
- $\{ y \mid \Psi(x) \} \in \tau$ の形のとき 3 回
- それ以外の時は 1 回

定理の証明 II

Example.

$$b(y \in \overbrace{\{\, x \mid \underbrace{\{\, y \mid y \neq y \,\}}_{1\text{ 回}} \in x \,\}}^{3\text{ 回}}) = 4$$

こうして定めた重みに辞書式順序を入れ,

$$\Gamma := \Phi(\{\, x_1 \mid \Psi_1(x) \,\}, \ldots, \{\, x_n \mid \Psi_n(x) \,\})$$

に重みによる帰納法を適用し，$P^* \vdash \Gamma \leftrightarrow \phi$ なる ϕ の存在を示す.

1. 重みが $\langle 0, \ell \rangle$ のとき：クラス項を含まないので，基本言語の式と見做せるから OK.

定理の証明 III

2. Γ が原子式のとき：基本公理 (4.2) および書き換え規則 (4.1) から，同値な書き換えで重みの減少するものが存在する．
3. 原子式ではない時：
   論理結合子や量化子についてバラして得られる各 Γ_i について帰納法の仮定を適用し，同値な基本言語の論理式 ϕ_i を得る．それらをバラした結合子で再びくっ付ければ，同値な基本論理式が得られる．

以上より帰納法が完了．命題が示された．

保存定理（**証明力**の比較）

次に，証明力が一致することを保証する定理を示す.

Th. 4.5 (保存定理)

1. ϕ : 基本言語の論理式 とすると,

$$P^* \vdash \phi \Leftrightarrow P \vdash \phi$$

2. T : 基本言語の理論, T^* : 拡張言語の理論 とし，任意の基本言語の論理式 ϕ について $T^* \vdash \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi$ が成立するとする．この時，基本言語の任意の公理系 $\mathcal{Q}$ と基本言語の論理式 ψ に対し,

$$T^* \cup \mathcal{Q} \vdash \psi \Leftrightarrow T \cup \mathcal{Q} \vdash \psi$$

Th. 4.6 (続き)

(iii)

- T, T^* 上に同じ
- $\Psi(A)$ A 以外にクラス変数を含まない拡張言語の式
- R 全てのクラス項に関する $\Psi(A)$ の基本インスタンス（又は T でそれらに同値な論理式）からなる集合

とするとき，任意の基本言語の論理式 ϕ に対し，次が成立.

$$T^* \cup \{ \Psi(A) \} \vdash \phi \Leftrightarrow T \cup R \vdash \phi$$

Th. 4.6 (続き)

- T, T^* 上に同じ
  $\Psi(A)$ A 以外にクラス変数を含まない拡張言語の式
  R 全てのクラス項に関する $\Psi(A)$ の基本インスタンス（又は T でそれらに同値な論理式）からなる集合

  とするとき，任意の基本言語の論理式 ϕ に対し，次が成立．

$$T^* \cup \{ \Psi(A) \} \vdash \phi \Leftrightarrow T \cup R \vdash \phi$$

- 基本言語の論理式に関する証明能力は同等
- 公理を後から付け足しても，証明力はかわらない.
- 拡張言語の論理式を足したら，そのインスタンスを全部付け加えれば同じ体系が得られる.

保存定理の証明（概略） I

各証明は骨が折れるが方針が立てばやるだけ．概略だけ述べる．
(i) の証明．$(\leftarrow)$ に関しては，論理法則は共通しており，外延性公理などについても特殊化すれば集合論の物が得られる．よって，P^* には P の公理群が全て含まれているので，明らかに
$P \vdash \phi \rightarrow P^* \vdash \phi$ が成立．
$(\rightarrow)$ を示す．論理式 Γ の P^* での証明木が次の条件を満たすとき，正規であるという．

1. 最初は公理から始まって置換則 $\dfrac{\Phi(A)}{\Phi(\tau)}$ $\dfrac{\Phi(A)}{\Phi(x)}$ だけが登場し，
2. その後はモーダス・ポネンス $\dfrac{\Phi \qquad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$ と汎化規則 $\dfrac{\Phi \rightarrow \Psi(x)}{\Phi \rightarrow \forall x \Psi(x)}$ だけが適用される．

保存定理の証明（概略） I

各証明は骨が折れるが方針が立てばやるだけ．概略だけ述べる．
(i) の証明．$(\leftarrow)$ に関しては，論理法則は共通しており，外延性公理などについても特殊化すれば集合論の物が得られる．よって，P^* には P の公理群が全て含まれているので，明らかに $P \vdash \phi \rightarrow P^* \vdash \phi$ が成立．
$(\rightarrow)$ を示す．論理式 Γ の P^* での証明木が次の条件を満たすとき，正規であるという．

1. 最初は公理から始まって置換則 $\frac{\Phi(A)}{\Phi(\tau)}$ $\frac{\Phi(A)}{\Phi(x)}$ だけが登場し，
2. その後はモーダス・ポネンス $\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$ と汎化規則 $\frac{\Phi \rightarrow \Psi(x)}{\Phi \rightarrow \forall x \Psi(x)}$ だけが適用される．

「略記法」はここでは厳密には定義されていないが，気分として．

保存定理の証明（概略） II

この時，以下が成立する．

Claim

$P^* \vdash \Gamma$ ならば，Γ は正規な証明木を持つ．

これは，置換規則より上に登場する M.P. と汎化規則の個数についての帰納法で容易に示せる．
この主張をつかって (i) を証明する．$P^* \vdash \phi$ の正規な証明木から，$P \vdash \phi$ の証明木を構成出来ることを示す．
公理から辿って必要な置換を終えた式を Ψ とする．もし Ψ にクラス変数が残っていたら，それをパラメータを含まないクラス項 $\{\, x \mid x = x \,\}$ で置き換える．こうして前提となる公理に置換を施して得られたクラス変数を含まない論理式を源式と呼ぶことにする．
この時，源式 Δ の基本化 $b(\Delta)$ を次の様に帰納的に定める．

1. $\Delta \equiv x = y$ または $\Delta \equiv x \in y$ のとき，$b(\Delta) = \Delta$

保存定理の証明（概略） III

2. クラス項を含む原子式であれば，前に定義した「略記法」に従って展開し，それを基本化する．例えば，$\Delta \equiv y \in \{ x \mid \Phi(x) \}$ のとき，

$$b(y \in \{ x \mid \Phi(x) \}) = b(\Phi(y)).$$

3. 量化や結合子が噛んでいる時は，バラして基本化する．

$$b(\Psi \wedge \Phi) = b(\Psi) \wedge b(\Phi)$$
$$b(\forall x \Phi) = \forall x b(\Phi)$$

保存定理の証明（概略） IV

証明木の各葉の部分にこの基本化を施すと，P での証明木の「骨格」が得られる．源式を基本化したものが P の定理となっているので，こうして P での証明木が得られる

(*ii*) の証明. ($\to$) だけ示せば後はその逆を行えばよい.
$T \cup \mathcal{Q} \vdash \phi$ とすると，定義から $\{\chi_1, \ldots \chi_n\} \subseteq \mathcal{Q}$ により
$T \cup \{\chi_1, \ldots \chi_n\} \vdash \phi$ と出来る.

$$\therefore T \vdash \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n \to \phi$$

ここで，$\mathcal{Q}$ は基本言語の論理式の集合だから，$\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n \to \phi$ は基本言語の論理式．よって再び仮定より，
$T^* \vdash \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n \to \phi$ となるので，

$$T^* \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \vdash \phi$$
$$\therefore T^* \cup \mathcal{Q} \vdash \phi$$

逆も同様.

保存定理の証明（概略） V

(*iii*) の証明.($\leftarrow$) は易しい．$T \cup R \vdash \phi$ とすると，上と同様の議論により $\psi_1, \ldots, \psi_n \in R$ によって $T^* \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \phi$ と出来る．今，仮定より各 ψ_i は $\Psi(A)$ の基本インスタンスであり，従って $\Psi(A)$ より従う．よって，$T^* \cup \{\Psi(A)\} \vdash \phi$
($\rightarrow$) を示す．ϕ は $T^* \cup \{\Psi(A)\}$ に現れる論理式に置換，MP，汎化を適用して得られる．除去定理より，置換インスンタンスに登場するクラス項は同値な基本言語での論理式によって書き直すことが出来る．R に関する仮定から，そうして得られた各置換インスタンスに同値な R の元が存在する．後は上と同様な議論によって示せる．

保存定理の使い方

保存定理の主張 P, P^* から出発して，$(ii), (iii)$ の条件を満たすように体系を拡張していけば，基本言語の論理式に関しては同等な力を持つように出来る．

前節でやったような，クラス変数はクラス項を表すという立場に立てば，R こそが $\Psi(A)$ の基本インスタンスを与えるもの．

クラスの存在に関する言明

クラスに関する量化は許されていないが，次のような言明をしたい時がある．

クラス B が存在し，$\Psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, B)$ を満たす．

或いは，

どんな $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ に対しても，$\Psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, B)$ を満たすクラス B が存在する．

これは拡張言語の文ではない．このような言明は，$y_1, \ldots, y_k$ を追加的なパラメタに含むクラス項
$\{ x \mid \Phi(x, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, y_1, \ldots, y_k) \}$ を証明の途中で与えて，

$$\exists y_1 \ldots \exists y_k (\Psi(\{ x \mid \Phi(x, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, y_1, \ldots, y_k) \}))$$

を証明せよ，という契約を表す．

Exercise 4.7

1. 内包公理をクラスに関するひとつの文として定式化せよ.
2. $\{ x \mid x \notin x \}$ が真のクラスであることを示せ.

Solution 4.8 ((*i*) の解)

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in A) \tag{1}$$

がその答えである．実際，内包公理のインスタンス

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

は，(1) において $A = \{ x \mid \phi(x) \}$ ととればよい．また，(1) のクラス項 $\{ x \mid \Phi(x) \}$ に関する基本インスタンス

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in \{ x \mid \Phi(x) \})$$

は，

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \Phi(x))$$

と同値であり，除去定理 (4.4) から $\Phi(x)$ は基本言語に同値な論理式 $\phi(x)$ を持つので，

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

と同値．これは内包公理スキーマのインスタンスである．

演習問題の解

Solution 4.9 ((*ii*) の解)

$\neg\exists y(y = \{\, x \mid x \notin x \,\})$ を示す．$y = \{\, x \mid x \notin x \,\}$ となるような y があったとすると，公理の (2) および (1) より，

$$\forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

が成立する．これが成立しないということが，正に *Russel* の逆理そのものである．よって $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は真のクラスである．

Solution 4.9 ((*ii*) の解)

$\neg\exists y(y = \{\, x \mid x \notin x \,\})$ を示す．$y = \{\, x \mid x \notin x \,\}$ となるような y があったとすると，公理の (2) および (1) より，

$$\forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

が成立する．これが成立しないということが，正に *Russel* の逆理そのものである．よって $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は真のクラスである．

後に出て来る正則性公理は，これが集合全体のクラスと一致することを主張している．

函数・関係記号の導入 I

本質的には集合論は述語 $=$ と $\in$ だけからなるが，集合論を開発していくに当って，普通の数学でやるように関係や函数を定義する方法を導入する方が便利．やりなれているので，除去・保存定理は証明しない．
以下，小文字ドイツ文字はクラス変数または集合変数を表すとする．
<u>関係の定義</u> 関係 $R(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ は，これ以外に自由変数を持たない論理式 Φ を使って，

$$R(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \leftrightarrow \Phi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$$

のように定義される．

集合値函数

<u>集合値函数の定義</u> $\Phi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ をこれ以外に自由変数を持たない論理式とする．議論対象の理論 T について，

$$T \vdash \exists! y \Phi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, y)$$

が成立するとする．この時，y を $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ の函数 $F(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ として，

$$\Phi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, F(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n))$$

のように定義する．

函数についての注意

Rem.

1. 明かな場合は，函数を定義する際に論理式 Φ を明示しないことがよくある．
2. 特定の $a_1, \ldots, a_n$ に対する値にしか興味がない場合がある．この時，その範囲から外れる部分の値については適当な値，特に後程見る空集合 0 を取ると約束する．
3. クラス値函数を考えることも出来，それはクラス項 $\{\, x \mid \Phi(x, a_1, \ldots, a_n) \,\}$ で与えられる．これを $F(a_1, \ldots, a_n)$ と略記することも出来るが，これは飽くまでクラス項の略記にすぎない．
4. 後程，ある種の集合やクラスの事を「関係」「函数」と呼ぶことがある．これらの概念は，ここでの「関係」「函数」と幾分関係があるが，基本的には別物．

関係，函数の引数に関する約束

上ではクラス変数または集合変数としたが，一般にクラス引数に限ることにする．そうすることで，クラス項を引数とすることが出来る．つまり，

1. 関係 $R(A_1, \ldots, R_n, y_1, \ldots, y_m)$ は，実際には $R(A_1, \ldots, R_n, B_1, \ldots, B_m)$ であって，B_i のうち少なくとも一つが真のクラスの時偽であるものとする．
2. 函数 $F(A_1, \ldots, R_n, y_1, \ldots, y_m)$ は，実際には $F(A_1, \ldots, R_n, B_1, \ldots, B_m)$ であって，B_i のうち少なくとも一つが真のクラスの時は値 0 を取るものとする．

$\Rightarrow$ 定義で集合変数を使うのは,「集合にしか興味ないよ」と明示するため．

項，函数に関する諸注意

Def.

- クラス変数とクラス項以外の項，つまり集合変数や一番外側の記号が函数であるものを集合項と呼ぶ．これらは函数の定義から必ず集合となる．
  1. $H(\{\, x \mid \Phi(x) \,\}, y, A)$ のように，内部にクラス項を含む集合項も考えられる．
- τ を項，特定の変数 $x_1, \ldots, x_n$ を取り出して，τ のアクティヴな変数と呼ぶことにしよう．これら以外で τ に出現する自由変数を，パラメータと呼ぶ．
  アクティヴ変数を強調して $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ と書く．
  $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ を論理式としたとき，
  $$\{\, x \mid \exists x_1, \ldots, \exists x_n(\Phi(x_1, \ldots, x_n) \land x = \tau(x_1, \ldots, x_n)) \,\}$$
  を
  $$\{\, \tau(x_1, \ldots, x_n) \mid \Phi(x_1, \ldots, x_n) \,\}$$
  と略記する．

Rem. 4.10

$\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ を満たす $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ は一般に真のクラスたり得るが，それは $\{\, \tau(x_1, \ldots, x_n) \mid \Phi(x_1, \ldots, x_n) \,\}$ の元ではない.
混乱の恐れがあるので，全ての $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ が集合にならない限り，この記法は使わない.

一般にアクティヴ変数とパラメータを見分ける方法は与えていないが，特に約束の無い限り ϕ と τ の両方に自由出現するものをアクティヴと見做す.

Def. 4.11

1. クラス A の和 $\cup A = \{\, x \mid (\exists u \in A)(x \in u) \,\}$
2. クラス A の共通部分 $\cap A = \{\, x \mid (\forall u \in A)(x \in u) \,\}$
   ここで，$\cap 0 = V$ に注意.
3. $$\bigcup_{\Phi(x_1,\ldots,x_n)} \tau(x_1,\ldots,x_n) = \cup\{\, \tau(x_1,\ldots,x_n) \mid \Phi(x_1,\ldots,x_n) \,\}$$
4. $$\bigcap_{\Phi(x_1,\ldots,x_n)} \tau(x_1,\ldots,x_n) = \cap\{\, \tau(x_1,\ldots,x_n) \mid \Phi(x_1,\ldots,x_n) \,\}$$