集合論ゼミ 2012 年 11 月 13 日

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科三年

2012 年 11 月 13 日

第二節 順序と整礎性

- 目的：集合論の宇宙を数学的に調べる.
- まずは順序の観点から.
- この章では宇宙の骨格を明らかにする.
- 順序数は整列性を調べるのに必要な範囲だけ.
- $\in$ に整礎性を適用することで整礎集合のクラスが得られる.
  - 基礎の公理は，このクラスが宇宙と全体することを主張している.
  - 0 を一番底にもっていて，次の段階は今までの階層全部の和の冪になっている.

順序に関する定義

Def. 1.1

1. 「R が非反射的」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x(\langle x, x\rangle \notin R)$
2. 「R が推移的」
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x\forall y\forall z(\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R)$
3. 「R が半順序関係」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 「R は非反射的かつ推移的」
4. 「R は A 上の（全）順序関係」「R は A を順序づける」
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $R|_A$は半順序 $\land \forall x\forall y(x, y \in A \to x = y \lor x\,R\,y \lor y\,R\,x)$

- ここでは $\leq$-型ではなく $<$-型の順序を導入したので非反射的.
- 半順序は非反射的： R のフィールド上ではなく V 全体で定義されていると考える.
  - $\Leftrightarrow$ 非反射的全順序のとき，A は R のフィールドの部分集合となる
  - 但し，一点集合は任意の関係 R について全順序集合となる（!!）

Def. (続き)

5. R : 関係として，
「x は A の R-極小元」$\overset{\text{def}}{\iff} x \in A \land (\forall y \in A) \neg y\,R\,x$
R が全順序なら，A の最小元と一致する．R のフィールドに居ない元は全部 R-極小元.

6. 「R が *left-narrow*」$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x(\{\, y \in A \mid y\,R\,x \,\}$ が *set*$)$
「R が A 上 *left-narrow*」$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in A(\{\, y \in A \mid y\,R\,x \,\}\ \mathit{set})$
「R が *right-narrow*」$\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in A)(\{\, y \in A \mid x\,R\,y \,\}$ が *set*$)$
以下同文.

7. 「R は A を整列する」$\overset{\text{def}}{\iff}$ R は A 上の *left-narrow* な全順序であり，A の任意の非空部分集合が R-極小元を持つ.

8. 「R は対称的」$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x \forall y(x\,R\,y \leftrightarrow y\,R\,x)$

narrow / 非 narrow 関係の例

Example 1.2 (narrow / 非 narrow 関係の例)

- 部分集合公理より A : set ならば，任意の関係 R は A 上 left-narrow かつ right-narrow.
- 函数は right-narrow（集合値のものだけを「函数」と呼ぶことにした）．更に 1 対 1 函数は left-narrow.
- $\in$-関係は，元になるのは集合だけなので常に left-narrow だが，right-narrow とは限らない ($0 \in V$).
- R が left-narrow のとき，その逆関係 R^{-1} は right-narrow.

整列性に left-narrow を課したのは，整列集合と整列クラスを統一的に扱うため．集合論においては整列関係の殆んどが left-narrow.

基礎論の講義でお馴染なので軽く．講義でやった L-構造の内，L がただ一つの二項関係 R を持つ場合．

Def. 1.3 (1-二項関係構造)

A : クラス, $R \subseteq A \times A$ とするとき,「順序対」$\langle A, R\rangle$ を（1-二項関係）構造と呼ぶ．このとき，A を R の「宇宙」または「クラス (明らかなときには集合)」と呼ぶ．この時，$\langle A, R\rangle$ をクラス A 上の構造と云う．

A が集合なら $R \subseteq A \times A$ は集合となる．しかし，A が真クラスのとき $\langle A, R\rangle$ は約束から 0 になってしまう．その場合，飽く迄 $\langle A, R\rangle$ は方便として扱う．

Exercise 1.4

順序対 $\langle A, B\rangle$ を，任意のクラス A, B に対し，両方共が集合のときは今まで通りの定義とし，少なくとも一方が真のクラスのとき $(\{0\} \times A) \cup (\{\{0\}\} \times B)$ で定める．これがクラスについても順序対のような性質を満たすことを示せ．

易しいし面倒なので証略．

Def. 1.5 (部分構造)

1. 「$\langle B, S\rangle$ が $\langle A, R\rangle$ の部分構造」 $\overset{\text{def}}{\iff} B \subseteq A$ かつ $S = R|_B$
2. 「F が $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ の中への同型」
$\overset{\text{def}}{\iff} F : A \to B$: 単射 $\wedge\ (\forall x, y \in A)(x\,R\,y \leftrightarrow F(x)\,S\,F(y))$
「F が A から B の上への同型」$\overset{\text{def}}{\iff} F$ が A から B の中への同型 $\wedge F$ は B の上への写像
3. 「構造 $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ が同型」$\overset{\text{def}}{\iff} A$ から B の上への同型が存在する．
このとき，$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ と書く．
$\langle a, r\rangle \cong \langle b, s\rangle$ は集合論の論理式として書けるが，A, R, B, S が集合でない場合は書けない．その場合，F を具体的に与える必要がある．
4. $\langle A, R\rangle$: 構造, $F : A \to B$(全単射)
のとき，$S = \{\, \langle F(x), F(y)\rangle \mid x, y \in A, \langle x, y\rangle \in R \,\}$ を，B 上 F と R から誘導される構造と云う．このとき，F は $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ の上への同型となる．

- R が $A \times A$ の部分クラスでない場合,「構造 $\langle A, R \rangle$」とは $\langle A, R|_A \rangle$ のこと.
    - このとき $R_A = S_A$ なら $\langle A, R \rangle$ と $\langle A, S \rangle$ を同一視する.
    - こうすることで $\langle A, R \rangle$ の $B \subseteq A$ に関する部分構造を $\langle B, R \rangle$ と書ける.
- $\langle a, R \rangle$ は集合論の対象として書ける.
- 他の場合, 特に何の約束もなければ $R \subseteq A \times A$ とする.

演習問題

Exercise 1.6

1. a 上の 1-二項関係構造全体は集合を成す.
2. $\langle a, r\rangle$ から $\langle b, s\rangle$ 上への同型写像全体は集合を成す.
3. $\langle B, S\rangle$ が $\langle A, R\rangle$ の部分構造
   $\Leftrightarrow$ B の恒等射が $\langle A, R\rangle$ の中への同型写像.

Prop. 1.7

構造の同型関係 $\cong$ は同値関係である.

Proof.

全部自明. ∎

順序クラスとか I

Def. 1.8

- R が半順序のとき構造 $\langle A, R\rangle$ を半順序クラス,
- R が全順序のとき構造 $\langle A, R\rangle$ を（全）順序クラス,
- R が整列順序のとき構造 $\langle A, R\rangle$ を整列クラス

とそれぞれ呼ぶ．A が集合であるときはそれぞれ「〜集合」と呼ぶ．半順序集合をよく poset と書く．

Term. 1.9

順序クラスとか II

- 明らかな場合 $\langle A, R\rangle$ の R は略す.
- R が半順序のとき，$x\,R\,y$ を「x は y に先行する」「x は y より小さい（未満）」「y は x より大きい」などと読む.
- $B \subseteq A$ のとき，$x \in B$ が 「B の最小元である」または特に全順序のとき「B の最初の元である」とは, $(\forall y \in B)(x \neq y \to xRy)$ のこと．論理式 $\Phi(x)$ についても同様の言い回しをする.
- 上と双対的な条件を満たす元を「B の最大元」とか，全順序の時は「最後の元」と呼ぶ.
- 特に指定の無い場合,「最大の集合」「最小の集合」はそれぞれ $\subseteq$-順序に関する最大・最小とする.

Example 1.10 (順序の例)

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: 通常の順序に関して全順序.
- $\mathbb{N}$ は特に整列順序.
- $\mathbb{N} \sim \{0\}$ は，約数順序 $a|b$ について半順序集合となるが，全順序集合ではない.
- 位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ について，$x, y \in X$ に対し

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{O})(x \in U \to y \in U)$$

によって $\leq$ を定めると，これはプレ順序になる．$\langle X, \mathcal{O} \rangle$ が T_0 空間のとき，特に X は半順序集合となり，T_1 空間であれば順序は自明となる.

順序の遺伝性

Prop. 1.11

1. $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ かつ $\langle A, R\rangle$ が半順序・全順序・整列クラス $\Rightarrow \langle B, S\rangle$ も半・全・整列クラス.
2. 半順序・全順序・整列クラスの部分構造も再び半・全・整列順序クラスとなる.

Proof.

自明. ∎

Def. 1.12 (単調函数)

$\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$: 半順序クラス, $F : A \to B$ 写像 とする.

1. F が（R, S についての）増加函数または狭義単調函数
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x, y \in A)(x\,R\,y \to F(x)\,S\,F(y))$
（特に，同型写像は増加関数である）
2. F が単調函数
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x, y \in A)(x\,R\,y \to F(x)\,S\,F(y) \vee F(x) = F(y))$
（狭義単調 $\Rightarrow$ 単調．定数函数 $\Rightarrow$ 単調）

$\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ を明示しない場合，$\langle V, \subseteq\rangle$ に関する物として解釈.
例 :「冪集合函数 $\mathfrak{P}$ は増加関数である」$\Leftrightarrow$ 「$\langle V, \subseteq\rangle$ から $\langle V, \subseteq\rangle$ への冪集合函数 $\mathfrak{P}$ は増加関数である」

Prop. 1.13

$\langle A, R\rangle$: 全順序クラス, $\langle B, S\rangle$: 半順序クラス, $F : A \to B$ 増加関数
$\Rightarrow F$ は $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ の中への同型写像

Proof.

F が増加関数より $x, y \in A$ に対し $xRy \to F(x)SF(y)$ が成立．あとは $F(x)SF(y) \to xRy$ が云えればよい．今，A は全順序より $xRy \vee x = y \vee yRx$ が成立． $x = y$ とすると $F(x) = F(y)$ となり矛盾し，yRx とすると F が増加関数であることから $F(y)RF(x)$ となり仮定に矛盾．よって xRy． ∎

Prop. 1.14

1. $$\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle : \text{全順序クラス}, A \cap B = 0$$
   $$\Rightarrow \langle A \cup B, R \cup (A \times B) \cup S\rangle \text{ は全順序クラス}$$

   これを順序和と呼び，$\langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle$ と表す.
2. $\langle A, R\rangle$: 整列集合, $\langle B, S\rangle$: 整列クラス
   このとき，$\langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle$ も整列クラスとなる．特に，B が集合なら整列集合となる.
3. 特に，$\langle a, r\rangle$ を整列集合とし，$z \notin a$ とすると，
   $\langle a \cup \{z\}, r \cup \{a\} \times z\rangle$ も整列集合となる（これは $\langle a, r\rangle$ と $\langle \{z\}, 0\rangle$ の順序和である）.

命題の証明

(1) は明らかに任意の二元が比較可能なので自明．(3) も (2) の特殊な場合なので省略.

(2) の証明.

$0 \neq z \subseteq \langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle$ とする．$z \subseteq A, z \subseteq B$ のときは A, B の整列性より z は最小元を持つ．$z \subseteq A \cup B$ のときは，$z \cap A$ を考えてその最小元を取ればよい．また，left-narrow 性についても，$z \in B$ のとき $(A \cup B)_z = A \cup B_z$ であり，A は仮定より集合なので，従って $(A \cup B)_z$ も集合となるので良い. ∎

演習問題 I

Exercise 1.15

1. 二つの整列クラスの順序和は整列クラスとなるか？
2. 次を満たすようなクラス T と関係 R を作れ．
   - a. R は T の各元を整列する．
   - b. $x, y \in T$ について，$x \subseteq y \vee y \subseteq x$ が成立し，かつ R は $\cup T$ を全順序づける．

(1) の答え．

ならない．前命題の証明で見たように，左側が集合でないと，右側の元に関する left-narrow 性が成立しない． ∎

(2) の答え.

今, A_n を

$$A_0 = 0$$
$$A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$$

とすると, $\langle A_n, \in \rangle$ が題意を満たす構造である.
実際, $A_n \subseteq A_{n+1}$ かつ $\cup A_{n+1} = A_n$ より (b) が成立する. (a) も明らか. ∎

Def. 1.16

$\langle A, R\rangle$: 全順序クラス, $B \subseteq A$ とする.

1. B が $\langle A, R\rangle$ で共終 (cofinal)
$\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in A)(x \in B \lor (\exists y \in B)xRy)$
2. $z \in A$ が B の上界 (bound) $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in B)(x = z \lor xRz)$
$z \in A$ が B の狭義上界 (strict bound) $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in B)xRz$
3. B が $\langle A, R\rangle$ で有界 (bounded) $\overset{\text{def}}{\iff}$ B が上界を持つ.
B が $\langle A, R\rangle$ で真に有界 (strictly bounded)
$\overset{\text{def}}{\iff}$ B が狭義上界を持つ.
4. B が $\langle A, R\rangle$ の（始）断面 (initial section) である
$\overset{\text{def}}{\iff} (\exists y \in A)B = \{\, x \in A \mid xRy \,\}$
y による $\langle A, R\rangle$ の始断面と云う. R が明らかなら A_y と書く.
5. B が $\langle A, R\rangle$ の（始）切片 (initial segment)
$\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x, y \in R)(x \in B \land yRx \to y \in B)$

補足

- 真に有界 $\Leftrightarrow$ 非共終.
- 始断面 $\Rightarrow$ 真に有界.
- 定義より，整列クラスの始断面は常に集合となる.
- 始断面は明らかに始切片である.
- 発表後の補足．半順序集合では，一般には非有界と共終性の概念は一致しない．非有界 $\Rightarrow$ 共終 は成立するが逆が不成立.

演習問題

Exercise 1.17

1. $B \subseteq A$ とする．
B が全順序クラス $\langle A, R\rangle$ で共終 $\Leftrightarrow B \cup R^{-1}[B] = A$
2. B が全順序クラス $\langle A, R\rangle$ で共終であるとする．このとき，
B が最大元を持つ $\Leftrightarrow A$ が最大元をもつ
であり，B, A の最大元は一致する．
3. $C \subseteq B \subseteq A, B$ が $\langle A, R\rangle$ で共終, C が $\langle B, R\rangle$ で共終
$\Rightarrow C$ が $\langle A, R\rangle$ で共終

(1) の証明.

B が $\langle A, R\rangle$ で共終であるとする．$B \cup R^{-1}[B] \subseteq A$ は明らかであるので，逆を示す.
$x \in A$ とする．定義より $x \in B \vee (\exists y \in B)xRy$ となる．$x \in B$ ならば OK．xRy とする．逆関係の定義より $yR^{-1}x$ であるから
$y \in R^{-1}[B]$.
$\therefore x \in B \cup R^{-1}[B]$
$(\Leftarrow)$ は自明. ∎

(2)($\Rightarrow$) の証明.

z_0 を B の最大元とする．即ち，$(\forall x \in B)(x = z_0 \vee xRz_0)$ とする．今，$y \in A \sim B$ を取ると，B の共終性から $(\exists x \in B)yRx$．よって推移律より yRz_0．よって z_0 は A の最大元である. ∎

(2)($\Leftarrow$) の証明.

$x_0 \in A$ を A の最大元とする．すると，$(\forall y \in B)(y = x_0 \vee yRx_0)$ が成立.
また，B は共終より

$$\forall x \in A(x \in B \vee (\exists y \in B)xRy)$$

となるので，特に $x = x_0$ とおけば,

$$x_0 \in B \vee (\exists y_0 \in)x_0Ry_0$$

となる．x_0Ry_0 とすると，y_0Rx_0 より x_0Rx_0 となり矛盾．よって $x_0 \in B$ となる．これは明らかに B の最大元である． $\blacksquare$

(3) は，地道に場合分けをしていけば簡単に解けるので省略.

断面や切片の性質 I

Prop. 1.18

全順序クラス $\langle A, R \rangle$ の異なる二元は異なる断面を定める．

Proof.

$a, b \in A$ とする． $a \neq b \to A_a \neq A_b$ を示す． $a \neq b$ より， A が全順序クラスであることから， $a < b$ または $b < a$ が成立． $a < b$ として一般性を失わない．すると，定義より $a \in A_b$ であり， $\neg(aRa)$ であるので $a \notin A_a$． よって $A_a \neq A_b$． ∎

Prop. 1.19

$\langle A, R \rangle$: 全順序クラス, B, C : A の始切片
$\Rightarrow$ B は C の始切片 $\vee$ C は B の始切片

Proof.

断面や切片の性質 II

B が C の始切片でないとすると，C が B の始切片となることを示せば十分である．$B \subseteq C$ とする．$x \in C \subseteq A$ について $(\exists y \in B)xRy$ とすると，B が A の始切片であることから $c \in B$. よって B が C の始切片になってしまい矛盾.
よって $B \not\subseteq C$ であり，従って $(\exists x_0 \in B)x_0 \notin C$ となる．C が始切片であることから，$(\forall y \in C)\neg x_0 Ry$ であり，特に全順序性より $(\forall y \in C)yRx_0$ となる．ここで $x_0 \in B$ と B が始切片であることから，$\forall y \in C(y \in B)$ である．つまり $C \subseteq B$ であり，C の条件から B でも始切片となる．よって示された. $\blacksquare$

全順序集合の切片による特徴づけ

Exercise 1.20 (Hessenberg 1906)

$\langle a, r\rangle$: 全順序集合, t : a の始切片全体の集合
とする．このとき，t は次の性質を満たすことが知られている．

- (a) $u, v \in t \to u \subseteq v \lor v \subseteq u$
- (b) $\forall x \forall y(x, y \in a \land x \neq y \to (\exists u \in t)(x \in u \land y \notin u \lor x \notin u \land y \in u))$
- (c) $s \subseteq t \to \bigcup s \in t$
- (d) $s \subseteq t \to a \cap (\bigcap s) \in t$
  （a との共通部分を取っているのは $s = 0$ の場合の対処.）

さて，$(a), (b)$ を満たすどのような $t \in \mathfrak{P}(a)$ に対しても，a 上の全順序 r が一意に存在して t の各元が $\langle a, r\rangle$ の始切片となることを示せ．更に t が $(c), (d)$ を満たすとき，t は $\langle a, r\rangle$ の始切片全体と一致することを示せ.
このようにして，全順序集合 $\langle a, r\rangle$ は $t \in \mathfrak{P}a$ を用いて $\langle a, t\rangle$ として表現することが出来，$(c), (d)$ を加えれば一意に定まる．
$a = \{x, y\}$ のとき，t はどのようになるか？順序対
$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ と比較せよ.

$(a),(b) \Rightarrow$ 全順序の証明.

$t \in \mathfrak{P}(a)$ が $(a),(b)$ を満たすとする時，r を次のように定める.

$$\langle x,y\rangle \in r \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists u \in t)(x \in u \land y \notin u)$$

すると，$\langle a,r\rangle$ は全順序集合となる．以下，$<= r$ と書く.

1. 非反射律.　$\neg x < x$ は明らか.
2. 推移律.　$x < y$ かつ $y < z$ とする．即ち，$u,v \in t$ があって $x \in u \land y \notin u \land y \in v \land z \notin v$ とする．(a) より $u \subseteq v$ または $v \subseteq u$．$v \subseteq u$ とすると $y \in u$ かつ $y \notin u$ となり矛盾．よって $u \subseteq v$ であり，従って $x \in u \subseteq v$ かつ $z \notin v$．$\therefore x < z$.
3. 比較可能性.　$x = y$ なら OK．そこで $x \neq y$ とすると (b) と r の定義より従う.

∎

証明 II

t の元が $\langle a, < \rangle$ の始切片であること.

$b \in t$ とする．$x, y \in a$ について $x \in b$ かつ $y < x$ であるとする．$<$ の定義から，$(\exists u \in t)(y \in u \wedge x \notin u)$ となる．すると (a) より $u \subseteq b$ または $b \subseteq u$ となる．後者は $x \in b$ に矛盾するので $u \subseteq b$. $\therefore y \in u \subseteq b$ より $y \in b$. これは b が始切片であることに外ならない. $\blacksquare$

以下，更に t が $(c), (d)$ を満たすとし，b を $\langle a, < \rangle$ の始切片とする．$b \in t$ となることを示す.

証明は b が最大元を持つ場合と持たない場合に分けて行われる.

b が最大元を持たない場合.

b が最大元を持たないので， $(\forall x \in b)(\exists y \in b) x < y$ とできる．今,

$$s := \{\, u \in t \mid (\exists x, y \in b)(x \in u \wedge y \notin u) \,\}$$

とおく．(c) より $\cup s \in t$ である．このとき $\cup s = b$ となることを示せばよい.
$x \in t$ とすると，b は最大元を持たないので， $<$ の定義から,
$x \in u \wedge y \notin u$ となる $u \in t$ が少なくとも一つ存在する．s の定義より $u \in s$ となるので $x \in \cup s$．よって $b \subseteq \cup s$.
他方，$z \in \cup s$ とすると定義より $u \in t$，$x, y \in b$ があって,
$x \in u \wedge y \notin u \wedge z \in u$．よって $<$ の定義より $z < y$ となり，b が切片であることから $z \in b$ となる.
よって示された. ∎

証明 IV

b が最大元を持ち，それが a の最大元と一致するとき．

a, b の最大元を x_0 と置く．b が切片であることから，$a = b$ となる．特に $0 \subseteq t$ かつ $a \cap (\cap 0) = a$ より $b = a \in t$ となり良い． ∎

b が最大元を持ち，それが a の最大元ではないとき．

$$s := \{ u \in t \mid (\exists y \in a)(x_0 \in u \wedge y \notin u) \}$$

とおく．このとき $a \cap (\cap s) = b$ となることを示せばよい．$\supseteq$ は明らか．$x \in \cap s$ とする．$x = x_0$ ならば良いので $x \neq x_0$ として $x < x_0$ を示せばよい．特に，$\langle a, r \rangle$ の全順序性から $x_0 \not< x$ を示せば十分である．$x_0 < x$ とする．定義より $v \in t$ があって $x_0 \in v \wedge x \notin v$ となる．この時 s の定義より $v \in s$ となる．すると $x \notin v$ より $x \notin \cap s$ となり矛盾．よって $x < x_0$ となる．
以上より，b が切片であることから $x \in b$ となる． ∎

証明 V

全順序集合 $\{x, y\}$ と $\langle x, y\rangle$ の比較.

$x < y$ としてよい．すると，$t = \{\, 0, \{x\}, \{x, y\}\,\}$ となる．これは全ての始切片を含むし，$(a) \sim (d)$ を全て満たしている．
これは，ちょうど $\langle x, y\rangle = t \sim 0$ となっている． ∎

Rem. 1.21 (歴史)

このような全順序の表現は *Hessenberg 1906* による．後程，他の関係も統一的に表現出来る *Hausdorff 1914* に取って代わられた．

第二節 整列順序

整列クラスの条件：任意の部分集合が最小元を持つ.
部分クラスでないのは，基本言語を逸脱する表明になるため.
しかし，次の定理のような強力な最小元の原理が成り立つ！

Th. 2.1 (最小元の原理，超限帰納法)

$\langle A, R\rangle$ を整列クラスとすると，以下が成立.

1. 最小元の原理.
   $(\exists x \in A)\Phi(x)$ ならば，$\Phi(t)$ を満たす最小の t が一意に存在する.
2. （超限）帰納法.
   $(\forall x \in A)[\forall y(yRx \to \Phi(y)) \to \Phi(x)]$ が成立するなら，
   $(\forall x \in A)\Phi(x)$

(1) の証明.

$B = \{\, x \in A \mid \Phi(x) \,\}$ として，B の最小元が存在することが示せればよい．条件より $B \neq 0$ なので，任意に $z \in B$ を一つとれる．これが最小元ならそれでよい．最小元でないとする．
$C = \{\, y \in B \mid yRz \,\} \neq 0$ とすると，整列クラスの定義から A_z は集合なので，従って $C \subseteq A_z$ も集合．よって，C は A の非空部分集合なので，整列性から最小元を持つ．C の最小元が B の最小元であることは，容易に判る． ∎

(2) の証明.

帰納法の仮定を仮定する．このとき，$\neg\Phi(x)$ なる x が存在したとして矛盾を導く．(1) より，$\neg\Phi(t)$ なる最小の t が存在する．即ち，$\forall x(xRt \to \Phi(x))$ が成立する．すると帰納法の仮定から $\Phi(t)$ となり，これは矛盾．
よって任意の $x \in A$ について $\Phi(x)$ が成立． ∎

Prop. 2.2 (整列順序の上界による特徴づけ; Cantor 1897)

全順序クラス $\langle A, R\rangle$ が整列集合であることは，次の二つの条件を満たすことと同値.

- ⓐ 真に有界な $u \subseteq A$ が最小の上界を A に持ち（或いは「u は直後の元を A に持つ」「u の任意の元より大きな元全体は最小元を持つ」），
- ⓑ R は *left-narrow* である.

この定義は，Cantor がはじめて整列集合を導入したときの定義.

整列クラス $\Rightarrow (a), (b)$ の証明.

(b) は定義より明らか．u を真に有界な A の部分集合とする．定義より

$$(\exists y \in A)(\forall x \in u)xRy$$

となる．すると，最小元の原理 (1) より，u は最小の狭義上界を持つことがわかる. ∎

$(a),(b) \Rightarrow$ 整列クラス の証明.

$0 \neq z \subseteq A$ とし，z が最小元を持つことを示せばよい．今，

$$U := \{\, x \in A \mid (\forall y \in z) xRy \,\}$$

とおく．$s \in z$ を任意の取ると，断面の定義から $U \subseteq A_s$ となり，A_s は left-narrow 性より集合なので U も集合となる．よって，(a) より U は直後の元 $t \in A$ を持つ．
z の各元は U の任意の元より大きいので，$(\exists a \in z)(aRt)$ とすると t の最小性に反する．よって全順序性より z の元は t 以上となる．
他方，$t \notin U$ より，U の定義から $(\exists y \in z)\neg(tRy)$ となる．再び全順序性から $(\exists y \in z)(y = t \vee yRt)$ となるが，上の議論より yRt は不適．よって $t \in z$ となる．この時，t は明らかに z の最小元である． ∎

整列集合の構造

- 有限全順序集合 $\Rightarrow$ 整列集合
- $\langle a, < \rangle$ を無限整列集合とする．
  1. $a \neq 0$ より最小元 a_0 が存在（これは 0 の後続元）．
  2. a_0 には後続元 a_1 がある．
  3. a_1 には……

  $\{a_0, a_1, \ldots\}$ と云う集合を作れる．$a = \{a_0, a_1, \ldots\}$ となる場合もある（$\mathbb{N}$ とか）．
  - 更に上に後続元があって，$\{\, a_0, a_1, \ldots, a_0^1, a_1^1, \ldots \,\}$ と続く場合もある（整数を $\{0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots\}$ と並べたものとか，$\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4} \ldots\}$ を並べたものなど）．
  - ⋆ もっと続けていくことも出来る．
  - 整列クラスの場合は，整列集合に良く似ているけど「更につづく」．この節の最後で意味はわかる．

整列クラスの始切片

Prop. 2.4

$\langle A, R\rangle$ を整列クラスとし，B をその始切片とする．
$\Rightarrow B = A$ であるか，または B は集合であって A の始断面となる．

証明の概略.

$B \neq A$ ならば B が A の始切片となることを示せばよい．最小元原理より $A \sim B$ には最小元 z_0 が存在する．このとき $B = A_{z_0}$ となることを示せばよいだけである． ∎

Exercise 2.5

命題 (2.4) の逆が成立すること，つまり $\langle A, R\rangle$ を任意の切片が集合かつ断面となるような全順序クラスとするとき，これは整列クラスとなることを示せ．

Proof.

left-narrow 性は明らか．$0 \neq u \subseteq A$ をとり，これが最小元を持つことを示す．今，$v = \{\, y \in A \mid (\forall x \in u) yRx \,\}$ とおけば，v は A の始切片となる．よって命題 (1.18) より $(\exists! x_0 \in A) v = A_{x_0}$ と出来る．このとき，$(\forall x \in u) x_0 R x$ とすると $x_0 \in v = A_{x_0}$ となり矛盾．よって全順序性より，$(\exists x \in u)[x = x_0 \vee xRx_0]$ となる． xRx_0 とすると $x \in A_{x_0} = v$ となり定義に矛盾．よって $x = x_0$ となるので $x_0 \in u$．
今，$x' \in u$ があって $x' R x_0$ となったとすると，$x \in u$ かつ $x \in v$ となり矛盾．よって x_0 は u の最小元． ∎

Prop. 2.6

$\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$: 整列クラス
$F : \langle A, R\rangle$ の始切片から $\langle B, S\rangle$ の始切片への同型写像
$\Rightarrow (\forall x \in \mathrm{Dom}(F))[F \restriction A_x$ は A_x から $B_{F(x)}$ の上への同型写像$]$

概略.

1. $F : A_{x_0} \xrightarrow{\sim} A_{y_0}$ とする.
2. $x \in A_{x_0}$ に対して $F[A_x]$ が B の始切片であることを示す.
3. $F[A_x]$ が始切片なので，2.4 より始断面となる．そこで $F[A_x] = B_y$ とする.
4. 始断面を取る操作の単射性 (1.18) より，$zSy \leftrightarrow zSF(x)$ を示すことで，$y = F(x)$ を証明する.

∎

Prop. 2.7

T : クラス, R : 二項関係 が,

1. R は T の各元を整列する
2. $(\forall x, y \in T)[x$ が y の始切片 $\vee$ y が x の始切片$]$

の二条件を満たすならば, R は $\cup T$ を整列する.

Proof.

$0 \neq z \subseteq \cup T$ が最小元を持つことを示す. $a \in z$ を取り, これが z の最小元ならばよい.
最小元でないとする. $a \in \cup T$ よりある $s \in T$ があって $a \in s$ とできる. このとき $z_a = \{ b \in z \mid bRa \}$ を考えると, $z_a \subseteq s$ となる. これを示すために, $c \in z_a$ とする. このとき再び定義から $t \in T$ により $c \in t$ と出来る. このとき条件 (2) から $s \subseteq t$ または $t \subseteq s$ が成立する. 最初の場合は $a \in s$ かつ cRa より s が始切片であることから $c \in s$. また後者の場合も $c \in t \subseteq s$ より OK.
よって $z_a \subseteq s$.
すると, 特に R は $s \subseteq A$ を整列するので, $z_a \subseteq s$ には最小元が存在する. これは明らかに z の最小元となっている. ∎

Exercise 2.8

2.7 の条件 (2) を $x \subseteq y \vee y \subseteq x$ に緩めても同様のことが云えるか？

解.

云えない．例えば

$T = \{\, \{-n, -(n-1), \ldots, 0, \ldots, n-1, n\} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ を考えると，T の各元は通常の順序 $<$ について全順序かつ有限集合なので，$<$ は T の各元を整列する．よって (1) および弱い (2) は成立．しかし $\mathbb{Z}$ は $<$ について整列集合ではない． ∎

帰納法による函数定義

集合論の強力な武器の一つに整列クラス上の帰納的定義がある．$\langle A, R\rangle$ を整列クラスとして，函数 F の x における振舞いを， A_x での F の値に依存して決定したい．これを精密化すると

$$F(x) = \tau(F \restriction A_x)$$

と云う要請になる．x に陽に依存する形で $F(x) = \tau(x, F \restriction A_x)$ としてもよいが，$A \sim \mathrm{Dom}(F \restriction A_x)$ の最小元として x が得られるので，これは省ける．

帰納定理による定義

Th. 2.9 (von Neumann 1923, von Neumann 1928a)

$\langle A, R\rangle$: 整列クラス, τ :
集合・クラス変数を含むかもしれない集合項
$\Rightarrow$ 次を満たす函数 F が一意に存在する.

$$(\forall x \in A)F(x) = \tau(F \upharpoonright A_x) \tag{1}$$

証明の outline.

(1) が F の取るべき値を表しているが，F は集合ではなくクラスなので，具体的なクラス項を与える必要がある．次のようにする．

1. F, F' を A の始切片上で定義され (1) を満たす函数とする．このとき F, F' が両立することを超限帰納法により示す．
2. すると，特に A は A 自身の切片なので，定理の主張する F が一意に定まることが判る．
3. T を A の切片上で定義された函数 f で (1) を満たすもの全体とする（これらの函数は特に集合）．I.6.30(ii) より $\cup T$ は集合となるので，$F = \cup T$ とする．
4. F が (1) を見たすことを示す．
5. $\mathrm{Dom}(F) = A$ を示す．$\mathrm{Dom}(F) \neq A$ とし，h を $\mathrm{Dom}(F)$ の直後の元まで定義域を拡張した函数とする．このとき $h \in T$ を示して矛盾を導く．

∎